

Verkehrspolitik machen die weitere Zielrichtung deutlich: Gleichbehandlung wird nicht verstanden als »Gleichmacherei«, sondern vielmehr als Schaffung gleicher Startbedingungen unter den verschiedenen Verkehrsträgern; diese ist wiederum Voraussetzung für einen von echtem Wettbewerb gekennzeichneten Verkehrsmarkt.

Eine Übersicht und Kritik bestehender Ungleichheiten im Verkehrswesen der Schweiz verdeutlicht den Abstand zwischen den realen Gegebenheiten sowie dem angestrebten Leitbild im Rahmen der Gesamtverkehrskonzeption: gemeinwirtschaftliche Verpflichtungen,

unternehmungsfremde Lasten, Fragen der Abgeltung, Unterschiede in der steuerlichen Belastung der Verkehrsträger sowie in den Betriebs-, Arbeits- und Sozialbedingungen sind dabei die wesentlichen Faktoren, die die relative Startposition der verschiedenen Verkehrsträger im Wettbewerb beeinflussen. Ein Blick zurück ins eigene Land dürfte sicher deutlich machen, daß es sich hierbei jedoch nicht um ein spezifisch schweizerisches Problem handelt, daß vielmehr auch der deutsche Verkehrspolitiker durch die vorliegende Veröffentlichung angesprochen wird.

*Dipl.-Volksw. Q. Faludi, Köln*

## Die Anwendung einer verallgemeinerten Wachstumsfunktion zur Prognostizierung — gezeigt am Beispiel der PKW-Motorisierung

VON DR. TECHN. PETER CERWENKA, DARMSTADT

### 1. Begriff und Gegenstand der Prognose

Jede Planung bedarf einer Prognose. Abgesehen von intuitiven Prognosen, die mangels erprobter Verfahren sowie mangels entsprechenden Datenmaterials in gewissen Fällen die einzigen Auswege darstellen und dann auch ihre Daseinsberechtigung haben können, sollen Prognosen methodisch und datenmäßig fundiert sein und dürfen nicht auf zweckorientierten Spekulationen basieren.

Definitionsgemäß stellt eine Prognose entweder unmittelbar oder mittelbar die Abhängigkeit einer bestimmten Größe von der Zeit bzw. von zukünftigen Zeitpunkten dar. Jede Prognose beruht letztlich in irgendeiner Form auf der Auswertung von Beobachtungen der bisherigen Entwicklung. Voraussetzung für eine Prognose ist, daß keine grundlegenden (systematischen) Änderungen in der betrachteten Entwicklung eintreten, wie sie beispielsweise durch Krieg, sonstige Katastrophen oder einschneidende politische Maßnahmen hervorgerufen werden können. Solche Ereignisse sind kaum prognostizierbar.

Gegenstand der hier behandelten Prognose ist der PKW-Motorisierungsgrad, also der auf die Einwohnerzahl bezogene Bestand an PKW + Kombi mit der Dimension [PKW + Kombi/1000 E], in der Bundesrepublik Deutschland.

### 2. Prognosemethoden

Im wesentlichen sind zwei verschiedene Methodengruppen zur Erstellung von Prognosen anwendbar.

Bei der ersten Methodengruppe (Trendprognosen) wird ein direkter Zusammenhang der gesuchten Größe mit der Zeit ermittelt.

Bei der zweiten Methodengruppe (Modellprognosen) ermittelt man Kausalzusammenhänge zwischen der gesuchten Größe und bestimmten anderen Faktoren (exogenen Einflußfaktoren), von denen offensichtlich ein wesentlicher Einfluß auf die gesuchte Größe ausgeht oder wenigstens vermutet wird. Nach Ermittlung solcher Kausalzusammenhänge ist es erforderlich, die Einflußfaktoren selbst zu prognostizieren, das heißt, nunmehr unmittelbare Abhängigkeiten der Einflußfaktoren von der Zeit zu ermitteln. Mitunter unterbleibt aber dieser letzte Schritt, und man begnügt sich, die gesuchte Größe für vermutlich zeitstabile Grenzwerte oder für geplante Sollwerte der Einflußfaktoren zu ermitteln. Häufig werden Prognosewerte für die Einflußfaktoren auch durch Vergleich mit denen von analogen, in ihrer Entwicklung jedoch schon weiter fortgeschrittenen Systemen abgeschätzt.

Welche Methode man im Einzelfall auch wählt, drei Tatsachen müssen stets sorgfältig beachtet werden:

- Jede Prognose setzt gewisse Annahmen voraus und läuft letztlich unmittelbar oder mittelbar auf eine Extrapolation bzw. »Hochrechnung« hinaus.
- Jede Aussage, die aufgrund einer Prognose für einen bestimmten Prognosezeitpunkt geäußert werden kann, ist um so gesicherter, je mehr und je genauere Daten aus der vergangenen Entwicklung vorliegen, ferner, je besser es gelingt, die Gesetzmäßigkeiten der untersuchten bisherigen Entwicklung zu erfassen und zu beschreiben.
- Auch und gerade unter der Voraussetzung, daß auftretende Schwankungen in einer Entwicklung nicht durch grundlegende Veränderungen beeinflußt werden, sondern »zufällig« bedingt sind, wird ein einzelner, für einen bestimmten zukünftigen Zeitpunkt  $t$  prognostizierter (stetiger) Wert  $f_t$  mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit nicht eintreten; es müssen vielmehr in jedem Prognosefall eine untere und eine obere Schranke ( $f_{t,u}$ ,  $f_{t,o}$ ) für die gesuchte Größe angegeben werden. Nach Möglichkeit soll dieses »Konfidenzintervall« von einem geforderten Wahrscheinlichkeitsniveau abhängen.

### 3. Literaturauswertung

Aus einer Literaturauswertung<sup>1)</sup> kann zunächst im wesentlichen die Gruppierung der Prognosemethoden in Trendprognosen und Modellprognosen bestätigt gefunden werden (wobei auch Kombinationen auftreten). Jede der beiden Methodengruppen wird in der Literatur teilweise mit Nachdruck als allein gültig bezeichnet, ohne daß objektive Beweise für diesen Ausschließlichkeitsanspruch gegeben werden können. Dieser darf aber auch gar nicht erhoben werden, da bei Prognosen von Entwicklungen, die der Mensch

<sup>1)</sup> Vgl. Zimmermann, H., Die künftige Entwicklung des Bestandes an Personenkraftwagen in der Bundesrepublik Deutschland (= Schriftenreihe des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Wirtschaftsforschung, Neue Folge, Nr. 10), Essen 1955; Zimmermann, H., Der voraussichtliche Bestand an Kraftfahrzeugen in der Bundesrepublik Deutschland im Jahre 1967 (= Schriftenreihe des Rheinisch-Westfälischen Institutes für Wirtschaftsforschung, Neue Folge, Nr. 14), Essen 1959; Deutsche Shell, Verdoppelung des PKW-Bestandes bis 1965 – Prognose der PKW-Entwicklung bis einschließlich 1975. Sonderdruck vom 30. September 1959, Hamburg 1959; Deutsche Shell, Methodik zur Prognose des Kraftfahrzeugbestandes bis 1975. Sonderdruck vom 19. Oktober 1961, Hamburg 1961; Tanner, J. C., Forecasts of Future Numbers of Vehicles in Great Britain, in: Roads and Road Construction, Vol. 40 (1962), Nr. 477, S. 263–274; Tanner, J. C., Forecasts of Vehicle Ownership in Great Britain, in: Roads and Road Construction, Vol. 43 (1965), Nr. 515, S. 341–347, Nr. 516, S. 371–376; Lebbey, B., Die Nachfrage nach Personenkraftwagen in der Bundesrepublik Deutschland (= Kieler Studien [Forschungsberichte des Instituts für Weltwirtschaft an der Universität Kiel] Nr. 60), Tübingen 1962; Siebke, J., Die Automobilnachfrage – Die Nachfrage nach Personenkraftwagen in der Bundesrepublik Deutschland mit einer Prognose bis zum Jahre 1970 (= Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1223), Köln und Opladen 1963; Kain, J. F., Beesley, M. E., Forecasting Car Ownership and Use, in: Urban Studies, Vol. 2 (1965/66), Nr. 2, S. 163–185; Heidemann, C., Zur Vorausberechnung des Bestandes an PKW in der Bundesrepublik bis 1980, in: Straßenverkehrstechnik, 9. Jg. (1965), Nr. 9/10, S. 157–160; Kohlhauser, W., Die voraussichtliche Entwicklung des Bestandes an Personenkraftwagen bis 1975, in: Monatsberichte des Österreichischen Institutes für Wirtschaftsforschung, 38. Jg. (1965), Nr. 11, S. 400–411; Kohlhauser, W., Die voraussichtliche Entwicklung des Bestandes an Personen- und Lastkraftwagen bis 1980, in: Monatsberichte des Österreichischen Institutes für Wirtschaftsforschung, 42. Jg. (1969), Nr. 10, S. 414–421; Wolff, K., Trendberechnung des Straßenverkehrs, in: Die Straße, 7. Jg. (1967), Nr. 8, S. 342–346; Mogridge, M. J. H., The Prediction of Car Ownership, in: Journal of Transport Economics and Policy, Vol. 1 (1967), Nr. 1, S. 52–74; Bonus, H., v. Schweinitz, H., Automobile und Motorisierung in der Bundesrepublik, in: Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 124. Band (1968), S. 541–568; Cerwenka, P., Eine Methode zur Erstellung von PKW-Motorisierungsprognosen (= Schriftenreihe Straßenforschung, Nr. 1, Herausgeber: Bundesministerium für Bauten und Technik, Wien 1972; Gerber, F., Ranft, B., Motorisierungsprognose – Gesamtschweizerisch, kantonale und regionale (= LS-Bericht Nr. 73/1, Herausgeber: Lehrstuhl für Verkehrswissenschaften, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich), Zürich 1973; Sarrasin, T., Spreer, F., Tietzel, M., Die Sättigungsgrenze der Motorisierung, in: Zeitschrift für Verkehrswissenschaft, 44. Jg. (1973), S. 147–162.

selbst beeinflußt und auch willkürlich steuern kann, exakte Beweise im naturwissenschaftlichen Sinne nicht möglich sind. Vielmehr ist der Planer darauf angewiesen und muß sich damit begnügen, mehr oder weniger objektive Plausibilitätskontrollen zu finden und Indizien für seine Hypothesen aufzuzeigen.

Bei den Trendprognosen wird in der überwiegenden Mehrheit die logistische Funktion<sup>2)</sup> herangezogen. Diese trägt dem Sättigungsphänomen der untersuchten Entwicklung Rechnung. Zur Anwendung dieser Funktion mit konkreten Zahlenwerten werden dabei stets Transformationen derart vorgenommen, daß ein linearer Zusammenhang entsteht. Bei den Modellprognosen überwiegen bei weitem wirtschaftliche Einflußgrößen (vor allem das jährliche Bruttosozialprodukt, bezogen auf den einzelnen Einwohner oder auf die Familie). Wie bereits angedeutet, muß eine echte Modellprognose in zwei Schritten vollzogen werden, von denen jeder mit etwa gleicher Genauigkeit durchgeführt werden sollte. In bezug auf Modellprognosen auf dem Gebiete der PKW-Motorisierung kann aus der Literatur jedoch festgestellt werden, daß das Ursachenmodell (erster Schritt) zumeist mit minuziöser Akribie erstellt wird, wohingegen für die Prognosemodelle der Einflußgrößen selbst (zweiter Schritt) entweder überhaupt nur grobe Annahmen für einen vermuteten Endzustand getroffen oder bestenfalls linear mit der Zeit sich ändernde Zusammenhänge ermittelt werden.

Gerade dieser zweite Schritt, der die eigentliche Prognose darstellt, wird vielfach nur in Form von Anmerkungen oder durch Verweis auf statistisches Material – jedenfalls häufig quantitativ nicht nachvollziehbar – mitgeteilt.

### 4. Wahl der Methodik für ein neues Prognosemodell<sup>3)</sup>

Es wird die Methode der Trendprognose gewählt. Diese Wahl wird nachstehend begründet.

Zunächst muß ein in der Literatur häufig und mit wechselnder Schärfe vorgebrachtes Argument gegen die Anwendung einer Trendprognose entkräftet werden, wonach eine Trendprognose die Bestimmungsfaktoren nicht berücksichtige, welche die untersuchte Entwicklung doch offensichtlich nachhaltig beeinflussen (bei Motorisierungsprognosen z. B. Kopfquote des Bruttosozialproduktes, Preisrelationen, Besteuerung des Kraftfahrzeugverkehrs, Ausbau des Straßennetzes), da nur die Zeit allein als »erklärende Variable« zugelassen ist. Hiergegen ist einzuwenden, daß eine Trendprognose weder die Mißachtung dieser Determinanten noch die Forderung impliziert, daß sich diese nicht ändern dürfen. Im Falle einer Motorisierungsprognose waren alle genannten und noch andere Einflüsse auch bisher wirksam und haben sich auch bisher gewandelt. Die Einflüsse werden jedoch nicht einzeln und explizit nach Art einer Ursachenanalyse erfaßt, sondern in unmittelbarer Zeitabhängigkeit und pauschal überlagert. Die Zeit darf allerdings nicht als »erklärende Variable« in dem Sinne verstanden werden, daß sie die Ursache für das Zustandekommen der untersuchten Größe darstellt. Was bei einer Trendprognose unterstellt wird, ist, daß die Änderungen der Einflüsse allmählich stattfinden und daß die Gesamtheit der Einflüsse stochastisch dem Modelltrend entspricht. Die erste Annahme erscheint bei der PKW-Bestandsentwicklung in einer demo-

<sup>2)</sup> Mathematische Definition dieser Funktion siehe Abschnitt 4.

<sup>3)</sup> Zu den generellen Grundlagen zu diesem Abschnitt vgl. Cerwenka, P., Langfristige PKW-Motorisierungsprognosen – gezeigt am Beispiel der Bundesrepublik Deutschland. Habilitationsschrift im Fachbereich Wasser und Verkehr der Technischen Hochschule Darmstadt 1974.

kratischen Gesellschaftsordnung ziemlich plausibel, die zweite Annahme kann bei keiner wie immer gearteten Prognose exakt bewiesen oder widerlegt werden. Sie kann aber methodisch kontrolliert und als plausibel (oder nicht plausibel) befunden werden. Gerade die Allmählichkeit des Wandels und die Vielzahl sich überlagernder und getrennt oft kaum erfassbarer Einflüsse sind somit Argumente für die Wahl einer Trendprognose. Die Anwendung der hier befürworteten Trendprognose auf die PKW-Motorisierung konnte allerdings noch bis vor einigen Jahren nicht zu gut abgesicherten Ergebnissen führen, da aus numerischen und statistischen Gründen eine Zeitreihe von mindestens etwa 20 Beobachtungen erforderlich ist.

Sieht man sich bei einer langfristigen Prognose des PKW-Motorisierungsgrades vor die Aufgabe gestellt, eine geeignete Trendfunktion festzulegen, so erhebt sich unmittelbar die grundlegende Frage nach der Existenz eines Sättigungsgrades, also nach dem Verhalten des Entwicklungsverlaufes in der (unendlich) fernen Zukunft. Sofern das Problem eines Sättigungsgrades, also eines endlichen Grenzwertes, an den sich ein Wachstumsprozeß asymptotisch annähert, vereinzelt in bisherigen Untersuchungen nicht vollständig ausgeklammert wird, besteht die einhellige Auffassung, daß ein solcher Sättigungsgrad existieren müsse. Die Ansichten über die Höhe desselben divergieren jedoch beträchtlich. Teilweise wird der Sättigungsgrad offensichtlich intuitiv (quantitativ nicht nachvollziehbar) geschätzt und pragmatisch festgesetzt, teilweise werden Überlegungen über den potentiellen Anteil von Personen mit Fahrerlaubnis an der Gesamtbevölkerung angestellt, teilweise werden auch Versuche einer endogenen Ermittlung aus der logistischen Wachstumsfunktion unternommen.

Um ein zusätzliches Indiz für die Existenz des Sättigungsgrades anzubieten, ist es erforderlich, eine Trendfunktion zu finden, welche so gebaut ist, daß sie die Existenz eines Sättigungsgrades zwar jederzeit zuläßt, aber nicht unbedingt und in jedem Falle zu einem solchen führen muß. Bisher wurde bei der praktischen Durchführung einer Trendprognose für den PKW-Motorisierungsgrad weitgehend ausschließlich die logistische Funktion zur mathematischen Beschreibung herangezogen. Diese wird üblicherweise in folgender Form angeschrieben (siehe etwa Abb. 1):

$$(1) \quad f = b_1 / [1 + \exp(b_2 - b_3 \cdot x)]$$

mit  $f \dots$  Motorisierungsgrad,

$x \dots$  (reduzierte) Zeit,

$b_1 \dots$  vorerst unbekannter Parameter ( $b_1 \dots$  Sättigungsgrad).

Soll die Kurve dem in Abb. 1 gezeigten Verlauf entsprechen, so gelten für die Parameter folgende Bereichseinschränkungen:

$$b_1 > 0, \quad b_3 > 0.$$

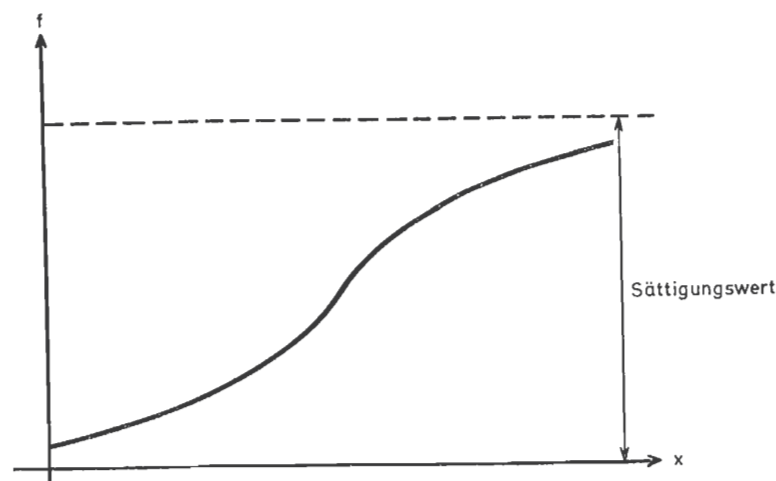
Die logistische Kurve ist bezüglich ihres Wendepunktes zentralsymmetrisch, ein Umstand, der häufig den tatsächlichen Sättigungsvorgängen nicht gerecht wird<sup>4)</sup>.

In zwei früheren Untersuchungen des Verfassers<sup>5)</sup> ist zum Zwecke der Prognostizierung

<sup>4)</sup> Gelegentlich wird das Argument der Exponentialfunktion um eine wirtschaftliche Einflußgröße (z. B. das jährliche Bruttosozialprodukt je Einwohner) erweitert.

<sup>5)</sup> Vgl. Cerwenka, P., Eine Methode ..., a.a.O.; derselbe, Langfristige PKW-Motorisierungsprognosen ..., a.a.O.

Abbildung 1: Wachstumsfunktion



des PKW-Motorisierungsgrades auch die Gompertz-Funktion herangezogen worden, die im allgemeinen in nachstehender Weise angeschrieben wird:

$$(2) \quad f = b_1 / \exp(b_2 \cdot b_3^x)$$

Die Bezeichnungen haben darin dieselben Bedeutungen wie bei der logistischen Funktion. Bei dieser Funktion (2) ist der Kurvenverlauf bezüglich des Wendepunktes nicht zentralsymmetrisch. Soll die Funktion dem in Abb. 1 gezeigten Verlauf entsprechen, so gelten hier für die Parameter nachstehende Bereichseinschränkungen:

$$b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad 0 < b_3 < 1.$$

Es läßt sich zeigen, daß sowohl die logistische Funktion als auch die Gompertz-Funktion Lösungen der gemeinsamen Differentialgleichung

$$\frac{df}{dx} / f = h_1 \cdot k \cdot [1 - (f/b_1)]^{1/k}$$

sind. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$(3) \quad f = b_1 / [1 + (h_2/k) \cdot \exp(-h_1 \cdot x)]^k$$

Dabei gelten folgende Zuordnungen:

$$\text{Logistische Funktion: } k = 1, \quad h_1 = b_3, \quad h_2 = \exp(b_2),$$

$$\text{Gompertz-Funktion: } k \rightarrow \infty, \quad h_1 = -\ln(b_3), \quad h_2 = b_2.$$

Allgemein kann festgehalten werden, daß sich mit

$$b_1 > 0, \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0 \quad \text{und} \quad k = 1, 2, 3, \dots \rightarrow \infty$$

die Funktionen, die sich mit (3) darstellen lassen, in hervorragender Weise zur mathematischen Beschreibung von Wachstumsprozessen eignen.

Vom Verfasser ist in einem Ausblick vorgeschlagen worden<sup>6)</sup>, diese verallgemeinerte Wachstumsfunktion (3) als Instrument zu einer verfeinerten Prognose heranzuziehen. Der Anstoß zu dieser Überlegung entstammt der aus der Literaturlauswertung gewonnenen Erfahrung, daß bei Fortschreibungen von Prognosen, die mit Hilfe der logistischen Funktion erstellt worden waren, Prognosewerte stets nach oben korrigiert werden mußten. Zur Erklärung dieser Erscheinung wird in einigen Untersuchungen die Hilfsvorstellung eines »gleitenden Sättigungsgrades« entwickelt. Um eine theoretische Begründung für die Verwendung der verallgemeinerten Wachstumsfunktion (3) geben zu können, ist es zweckmäßig, auf diese Hilfsvorstellung einzugehen. In einigen Untersuchungen<sup>7)</sup> wird angedeutet, daß es sinnvoll sein könnte, den Sättigungsgrad ( $b_1$ ) seinerseits zeitabhängig in die Wachstumsfunktion einzuführen. Würde man beispielsweise bei der logistischen Funktion in der Form (3) mit  $k = 1$  den Sättigungsgrad  $b_1$  selbst nach Art einer logistischen Funktion »gleiten« lassen, also den Ansatz

$$b_1 = S / [1 + H_2 \cdot \exp(-H_1 \cdot x)]$$

treffen (wobei die  $H_j$  zusätzliche Koeffizienten darstellen), so ergäbe sich nach Rückeinsetzen:

$$f = S / \{ [1 + H_2 \cdot \exp(-H_1 \cdot x)] \cdot [1 + h_2 \cdot \exp(-h_1 \cdot x)] \}$$

$S$  wäre dann ein »Endwert« des gleitenden Sättigungsgrades oder aber selbst wieder »Sättigungsgrad«. Der Begriff des gleitenden Sättigungsgrades darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß er nur als Gedankenstütze für eine modellmäßige Vorstellung benutzt werden kann; bei Umsetzung in ein konkretes mathematisches Modell muß es nämlich stets eine Konstante geben, welche den »Endwert« zahlenmäßig repräsentiert (im vorliegenden Falle  $S$  statt  $b_1$ ), sofern man das Konzept eines tatsächlichen, endlichen Sättigungsgrades beibehalten will. Definitionsgemäß sollte ausschließlich dieser Endwert als Sättigungsgrad bezeichnet werden. Nimmt man vereinfachend an, daß die  $H_j$  den  $h_j$  entsprechen, und ersetzt man dann noch  $h_2$  durch eine andere Konstante  $h$  mit  $h = 2 \cdot h_2$ , so kann man für  $f$  nunmehr die Beziehung

$$f = S / [1 + (h/2) \cdot \exp(-h_1 \cdot x)]^2$$

anschreiben. Diese Form wird vielfach als logistische Funktion zweiter Ordnung bezeichnet. Sie entspricht genau dem Ansatz (3) mit  $k = 2$ . Die Gompertz-Funktion (mit  $k \rightarrow \infty$ ) stellt in dieser Interpretation sozusagen die logistische Funktion höchster Ordnung dar. Sie trägt somit dem Effekt des Gleitens des Sättigungsgrades von allen Funktionen der Funktionenfamilie (3) am stärksten Rechnung. Man kann daraus folgern, daß die logistische Funktion ( $k = 1$ ) und die Gompertz-Funktion ( $k \rightarrow \infty$ ) extreme Wachstumsfunktionen ihrer Familie darstellen und somit im Vergleich untereinander eine untere und eine obere Grenze einer Wachstumsentwicklung repräsentieren.

Aus numerischen und rechentechnischen Gründen ist es erforderlich, folgende, gegenüber der üblichen Schreibweise geänderte, formelmäßige Darstellung der verallgemeinerten Wachstumsfunktion zu wählen:

$$(4) \quad f = a_1 / (1 + a_2 \cdot a_3^x / a_4)^{a_4}$$

<sup>6)</sup> Vgl. Cerwenka, P., Langfristige PKW-Motorisierungsprognosen ..., a.a.O.

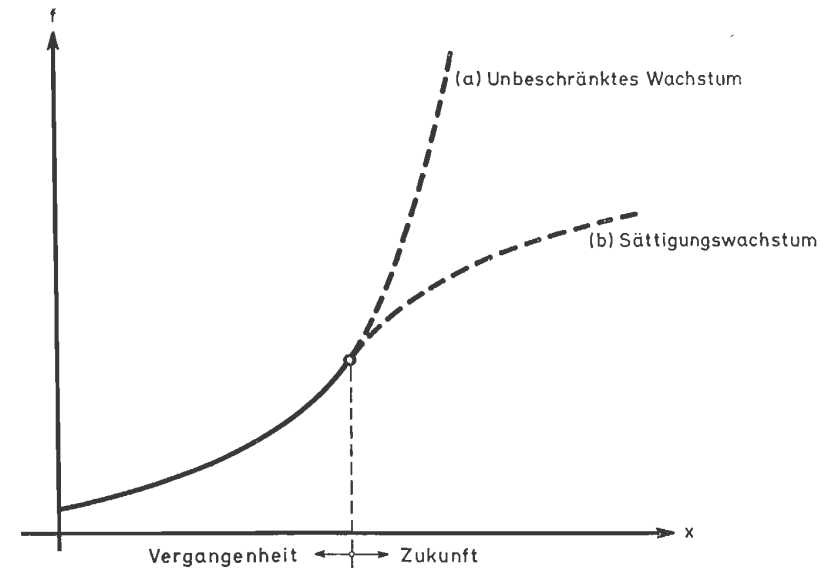
<sup>7)</sup> Vgl. z. B. Tanner, J. C., Forecasts of Future Numbers ..., a.a.O.; Siebke, J., Die Automobilnachfrage ..., a.a.O.

Dabei gelten für die neuen Koeffizienten  $a_j$  folgende Zuordnungen zwischen den inhaltlich identischen Schreibweisen (4) und (3):

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = h_2, \quad a_3 = \exp(-h_1), \quad a_4 = k.$$

$a_1$  wird nunmehr als stetige Größe betrachtet (nicht mehr als natürliche Zahl). Der Wert von  $a_4$  stellt ein Maß für die Intensität des Gleitens dar, während  $a_1$  dem Endwert des gleitenden Sättigungsgrades entspricht. Diese Schreibweise (4) hat den Vorteil, daß mit ihr je nach Größe der Parameter  $a_2$  und  $a_3$  sowohl ein »unbeschränktes Wachstum« als auch ein »Sättigungswachstum« beschrieben werden kann (Abb. 2).

Abbildung 2: Möglichkeiten des Wachstums



Kurvenverlauf (a) stellt sich ein für

$$a_1 > 0, \quad a_2 < 0, \quad a_3 > 1, \quad a_4 > 0,$$

Kurvenverlauf (b) stellt sich ein für

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad 0 < a_3 < 1, \quad a_4 > 0.$$

Wenn es gelingt, die unbekanntenen Koeffizienten  $a_j$  endogen aus einem Rechenverfahren zu ermitteln, so kann aus der Zugehörigkeit der Koeffizienten  $a_2$  und  $a_3$  zu einem der oben angeführten Bereiche ein zusätzliches Indiz für oder gegen ein Sättigungswachstum angeboten werden.

Neben dieser Absicht bestand auch wegen der unbefriedigenden Vielfalt der Meinungen in der Literatur über die Höhe des Sättigungsgrades ( $a_1$ ) das Bedürfnis, die Koeffizienten  $a_j$  endogen, das heißt eben aus einem Rechenverfahren selbst, abzuschätzen. Als Rechenverfahren zur numerischen Durchführung wurde die Regressionsrechnung nach

dem Prinzip der kleinsten Quadrate gewählt. Da in der gewählten Funktion die zu schätzenden Regressionskoeffizienten  $a_j$  (mit Ausnahme von  $a_1$ ) nichtlinear auftreten, kann hier die herkömmliche Regressionsrechnung nicht angewendet werden; vielmehr handelt es sich um eine echt nichtlineare Regressionsrechnung.

### 5. Ermittlung von Schätzwerten für die Regressionskoeffizienten

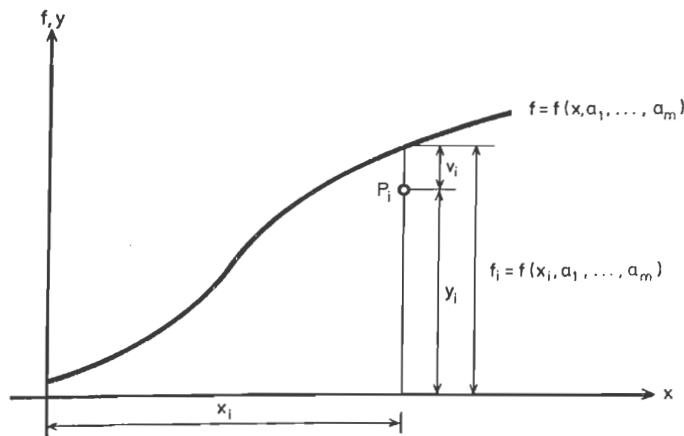
Die Methode der Regression besteht bekanntlich darin, eine statistisch gegebene, diskrete Punktfolge mittels einer zu wählenden Funktion (die eine bestimmte Anzahl von vorerst unbekanntem Parametern [Regressionskoeffizienten] aufweist) analytisch darzustellen. Die Bestimmung der Schätzwerte für diese Parameter erfolgt hier – wie bereits erwähnt – nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate.

Entsprechend Abb. 3 gilt:

$$v_i = f(x_i, a_1, \dots, a_m) - y_i.$$

Hierbei ist  $m$  die Anzahl der Parameter.

Abbildung 3: Schema der Regression



Die Bedingung für das Minimum der Fehlerquadratsumme  $V$  (Prinzip der kleinsten Quadrate) lautet:

$$V = \sum_{i=1}^n \{ [f(x_i, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2 \} = \text{Minimum}$$

Die Summation erstreckt sich dabei über alle  $n$  Beobachtungen. Diese Funktion  $V$  ist nach den einzelnen Koeffizienten  $a_j$  partiell zu differenzieren, und die Differentialquotienten sind Null zu setzen. Im vorliegenden Fall ist  $m = 4$ . Handelt es sich bei der Funktion  $f$  um eine hinsichtlich der Parameter nichtlineare Funktion, so ergibt sich im allgemeinen ein nichtlineares Gleichungssystem für die gesuchten Koeffizienten, das meist explizit nicht lösbar ist. Das trifft auch hier zu. Somit stellt sich die Aufgabe, die Methode der

echt nichtlinearen Regression für die praktische Handhabung aufzubereiten. (Eine numerische Bewältigung ist allerdings nur noch mit Hilfe einer EDV-Anlage möglich.) Zu diesem Zweck wird die gewählte Funktion  $f$  in eine *Taylor*-Reihe entwickelt, bei der nur die Glieder nullter und erster Ordnung berücksichtigt werden:

$$f(x, a_1, \dots, a_m) \approx f(x, a_{1,0}, \dots, a_{m,0}) + \frac{\partial f_0}{\partial a_1} \cdot (a_1 - a_{1,0}) + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial a_m} \cdot (a_m - a_{m,0}) = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial a_1} \cdot \Delta a_1 + \dots + \frac{\partial f_0}{\partial a_m} \cdot \Delta a_m$$

Die Bedingung des Fehlerquadratsummenminimums lautet damit angenähert:

$$V \approx \sum_{i=1}^n \left[ \left( f_{0,i} + \frac{\partial f_{0,i}}{\partial a_1} \cdot \Delta a_1 + \dots + \frac{\partial f_{0,i}}{\partial a_m} \cdot \Delta a_m - y_i \right)^2 \right] = \text{Minimum}$$

Nach partieller Differentiation ergibt sich mit der Hilfsbezeichnung

$$(5) \quad h_{i,j} = \frac{\partial f_{0,i}}{\partial a_j}$$

und mit den Größen

$$(6) \quad c_{j,k} = \sum_{i=1}^n (h_{i,j} \cdot h_{i,k}) \quad \text{und} \quad d_j = \sum_{i=1}^n [(y_i - f_{0,i}) \cdot h_{i,j}]$$

folgendes »Normalgleichungssystem der Regression«:

$$\begin{aligned} c_{1,1} \cdot \Delta a_1 + c_{1,2} \cdot \Delta a_2 + \dots + c_{1,m} \cdot \Delta a_m &= d_1 \\ c_{2,1} \cdot \Delta a_1 + c_{2,2} \cdot \Delta a_2 + \dots + c_{2,m} \cdot \Delta a_m &= d_2 \\ \vdots & \\ c_{m,1} \cdot \Delta a_1 + c_{m,2} \cdot \Delta a_2 + \dots + c_{m,m} \cdot \Delta a_m &= d_m \end{aligned}$$

Für die weiteren theoretischen Ableitungen ist es zweckmäßig, die Lösung dieses nunmehr linearen Gleichungssystems mittels Matrizeninversion darzustellen. Tatsächlich numerisch gelöst wird es am rationellsten nach dem *Cholesky*-Verfahren<sup>8)</sup>, da die Matrix  $C$  stets nur symmetrisch sein kann und im allgemeinen positiv definit ist. Wenn man die Elemente der zu  $C$  inversen Matrix mit  $\bar{c}_{j,k}$  bezeichnet, so ergibt sich nach Matrizeninversion für die gesuchten Koeffizientenverbesserungen  $\Delta a_j$ :

$$\Delta a_j = \sum_{k=1}^m (\bar{c}_{j,k} \cdot d_k)$$

Da die Reihenentwicklung nach den Gliedern erster Ordnung abgebrochen wurde, stellt auch der Koeffizientenvektor mit den Komponenten

$$a_j = a_{j,0} + \Delta a_j \quad (j = 1, \dots, m)$$

noch nicht die endgültige Lösung dar. Vielmehr werden die nunmehr erhaltenen verbesserten Werte  $a_j$  wieder neuen Werten  $a_{j,0}$  gleichgesetzt, und das Verfahren wird so lange wiederholt, bis die Bedingung

$$|\Delta a_j / a_j| < \varepsilon$$

<sup>8)</sup> Vgl. *Zurmühl, R., Matrizen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964.*

für alle Werte  $a_j$  erfüllt ist.  $\varepsilon$  wird als relative Iterationsgenauigkeit bezeichnet und hier zu  $10^{-6}$  gewählt. Es läßt sich beweisen, daß das Verfahren konvergiert, sofern die Ausgangsnäherungen  $a_{j,0}$  hinreichend nahe in der Umgebung der tatsächlichen Werte  $a_j$  liegen.

Für die Ermittlung von Ausgangsnäherungen bestehen verschiedene Möglichkeiten, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen wird<sup>9)</sup>.

An konkreten Daten sind im vorliegenden Fall folgende Werte erforderlich:

- Zahlen der registrierten PKW + Kombi, aufgeschlüsselt nach Stichtagen<sup>10)</sup>;
- Bevölkerungszahlen, ebenfalls aufgeschlüsselt nach Stichtagen<sup>11)</sup>.

Aus diesen Werten können durch Division die entsprechenden Eingabedaten  $y_i$  (beobachtete Motorisierungsgrade) zu den einzelnen Stichtagen  $t_i$  ermittelt werden<sup>12)</sup>.

Die analytische Erfassung der Stichtage erfolgt durch Umwandlung der Datumswerte in Dezimaljahreszahlen. Aus rechentechnischen Gründen empfiehlt es sich, diese so erhaltenen vierstelligen Zeitangaben durch Subtraktion einer Konstanten zu reduzieren. Die Wahl eines praktischen Nullpunktes auf der Zeitachse ist beliebig. Hier wird die Reduktion so vorgenommen, daß von jedem Stichtag  $t_i$  das arithmetische Mittel  $t_0$  aller Stichtage abgezogen wird:

$$x_i = t_i - t_0 \quad \text{mit} \quad t_0 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (t_i)}{n} \right]$$

Die eigentliche Regressionsanalyse wird sodann mit den Wertepaaren  $(x_i, y_i)$  durchgeführt.

Mit den in vorstehender Weise ermittelten Schätzwerten für die Regressionskoeffizienten können auch Schätzwerte für Funktionen von Regressionskoeffizienten (durch Einsetzen der Schätzwerte in die Funktionen) ermittelt werden. Im vorliegenden Fall interessiert man sich außer für die Regressionsfunktion selbst auch noch für den Wendepunkt. Für die Abszisse  $t_w$  des Wendepunktes erhält man:

$$t_w = -\ln(a_2) / \ln(a_3) + t_0$$

Die zugehörige Ordinate  $y_w$  des Wendepunktes ergibt sich zu:

$$y_w = a_1 / (1 + 1/a_4)^{a_4}$$

## 6. Konfidenzintervalle<sup>13)</sup>

Eine Prognose sollte nur dann als seriös bezeichnet werden, wenn für jeden Prognose-

<sup>9)</sup> Vgl. z. B. Cerwenka, P., Langfristige PKW-Motorisierungsprognosen ..., a.a.O.

<sup>10)</sup> Kraftfahrt-Bundesamt, Statistische Mitteilungen des Kraftfahrt-Bundesamtes und der Bundesanstalt für den Güterfernverkehr, 17. Jg. (1971), Nr. 10 (Oktober), S. B 1-B 7, 18. Jg. (1972), Nr. 7 (Juli), S. B 1-B 4, 19. Jg. (1973), Nr. 7 (Juli), S. B 1-B 4. Bonn-Bad Godesberg.

<sup>11)</sup> Statistisches Bundesamt, Fachserie A (Bevölkerung und Kultur), Reihe 1 (Bevölkerungsstand und -entwicklung), I. Bevölkerungsentwicklung, 2. Vierteljahr 1970, Stuttgart und Mainz 1970; dasselbe, Bevölkerungsentwicklung in den Ländern des Bundesgebietes am 27. 5. 1970, 30. 6. 1970, 31. 12. 1970, 31. 3. 1971 und 30. 6. 1971 (Schnellmitteilung VII A - 22/12/07 vom 10. Januar 1972), am 30. 6. 1972 (Schnellmitteilung VII A - 22/5 vom 14. November 1972) und am 30. 6. 1973 (Schnellmitteilung VII A - 22/5 vom 1. November 1973), Wiesbaden.

<sup>12)</sup> Die aus Fortschreibungen gewonnenen Bevölkerungszahlen an den Stichtagen zwischen den beiden Volkszählungen vom 6. Juni 1961 und 27. Mai 1970 wurden proportional der Differenz zwischen dem bis zum 27. Mai 1970 fortgeschriebenen und dem an diesem Tag erhobenen Wert korrigiert.

<sup>13)</sup> Zu den generellen Grundlagen zu diesem Abschnitt vgl. Cerwenka, P., Langfristige PKW-Motorisierungsprognosen ..., a.a.O.

wert ein Bereich innerhalb einer unteren und oberen Grenze angegeben wird. Solche Bereiche (Konfidenzintervalle) sollen möglichst von einem zu definierenden Wahrscheinlichkeitsniveau abhängen. Dieses wird nachstehend als Konfidenzwahrscheinlichkeit (P) bezeichnet und zu 90% gewählt.

Der Grundgedanke zur Berechnung von Konfidenzintervallen für eine beliebige Funktion  $g(a_1, \dots, a_m)$  der Regressionskoeffizienten besteht darin, daß die Differenz zwischen der Fehlerquadratsumme  $\bar{V}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$  bei beliebigen Parameterkonstellationen  $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$  und dem Fehlerquadratsummenminimum  $V$  (dem entsprechend Abschnitt 5 ganz bestimmte Parameter  $a_1, \dots, a_m$  zugeordnet sind) kleiner oder gleich einer Größe ist, die bei einem gegebenen Problem nur noch von der Konfidenzwahrscheinlichkeit abhängt, ansonsten aber konstant ist<sup>14)</sup>:

$$(7) \quad \bar{V}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) - V \leq K(P)$$

Diese Ungleichung wird zunächst noch von unendlich vielen Parameterkonstellationen  $\bar{a}_j$  erfüllt. Interessant sind jedoch die Extremwerte, die der Beziehung (7) im Grenzfall des Gleichheitszeichens genügen. Dieses Problem führt auf eine Extremwertberechnung unter Einhaltung der Nebenbedingung (7), die mit Hilfe des Lagrange'schen Operators bewältigt werden kann<sup>15)</sup>.

Erschwerend für die praktische Lösung wirkt sich hier wiederum die Nichtlinearität des sich ergebenden Gleichungssystems aus. Auch hier wird auf ein iteratives Verfahren mit Reihenentwicklung zurückgegriffen (Linearisierung der Funktionen wie in Abschnitt 5), von dem hier nur die formelmäßigen Ergebnisse wiedergegeben werden.

Mit den Bezeichnungen

$$e_j = \frac{\partial g}{\partial a_j}$$

und den Symbolen gemäß den Definitionen (5) und (6) sowie mit  $\bar{c}_{j,k}$  als Elementen der zur Matrix C inversen Matrix  $\bar{C}$  erhält man schließlich als Ergebnis für die Verbesserung des Ausgangswertes  $g_0$ :

$$(8) \quad \Delta g = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\bar{c}_{j,k} \cdot e_j \cdot d_k) \mp \eta \cdot \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\bar{c}_{j,k} \cdot e_j \cdot e_k)$$

mit

$$\eta = \sqrt{\left\{ [V - V_0 + K(P)] + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\bar{c}_{j,k} \cdot d_j \cdot d_k) \right\} / \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (\bar{c}_{j,k} \cdot e_j \cdot e_k) \right]}$$

Darin bedeutet  $V_0$  die Fehlerquadratsumme im jeweils vorangegangenen Schritt und  $V$  das Fehlerquadratsummenminimum. Man beginnt zweckmäßig mit den Parameterkonstellationen des Fehlerquadratsummenminimums, so daß im ersten Rechenschritt  $V = V_0$  ist. Das iterative Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die Bedingung

$$|\Delta g / g| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Da in Gleichung (8) der zweite Summand auf der rechten Seite nachweislich

<sup>14)</sup> Vgl. Beale, E. M. L., Confidence Regions in Non-linear Estimation, in: Journal of the Royal Statistical Society, Vol. B-22 (1960), S. 41-76.

<sup>15)</sup> Vgl. Mangold, H., Knopp, K., Einführung in die höhere Mathematik, II. Band, Stuttgart 1965.

nur nichtnegativ sein kann, ergibt sich für das Minuszeichen stets die untere Konfidenzgrenze und für das Pluszeichen stets die obere.

Um die Formel anwenden zu können, ist nun noch die Größe  $K(P)$ , Konfidenzkonstante genannt, zu definieren. Unter der Annahme von Normalverteilung der Residuen  $v_i$  hat die Konfidenzkonstante im linearen Fall folgenden Wert<sup>16)</sup>:

$$(9) \quad K(P) = m \cdot \sigma^2 \cdot F(P, m, n - m)$$

Hierin bedeutet  $m$  die Anzahl der Parameter,  $n$  die Anzahl der Beobachtungen,  $\sigma^2$  die Streuung der Beobachtungspunkte um die Regressionskurve und  $F(P, m, n - m)$  die zur  $F$ -Verteilungsfunktion (nach Fisher) inverse Funktion (»F-Wert«). Als Schätzwert für die Streuung wird die Größe

$$\sigma^2 \approx s^2 = \sqrt{V/(n - m)}$$

in Rechnung gestellt. Für nichtlineare Regressionen ist die rechte Seite der Gleichung (9) noch mit einem Nichtlinearitäts-Faktor  $B > 1$  zu multiplizieren. Dieser kann nach Beale ermittelt werden<sup>17)</sup>. Er liegt in den hier untersuchten Fällen jedoch so nahe bei Eins, daß er ohne weiteres vernachlässigt werden kann ( $B \approx 1,001$ ). Mit größer werdender Konfidenzwahrscheinlichkeit und größer werdendem Nichtlinearitäts-Faktor werden auch die Konfidenzintervalle größer.

### 7. Ergebnisse

Gemäß der in den vorangegangenen Abschnitten dargelegten Methodik wurde eine PKW-Motorisierungsprognose für die Bundesrepublik Deutschland bis zum Jahre 2000 erstellt. Die zahlenmäßige Durchführung der Berechnungen erfolgte mit der SIEMENS 4004/151 des Fachbereiches Informatik der Technischen Hochschule Darmstadt. Die Rechenergebnisse wurden mit dem BENSON-Plotter des Rechenzentrums der Technischen Hochschule Darmstadt graphisch dargestellt. Die Berechnungen wurden nicht nur für das Bundesgebiet insgesamt, sondern auch differenziert nach Bundesländern durchgeführt. Aus Platzgründen können hier jedoch nur die Ergebnisse für das Bundesgebiet insgesamt wiedergegeben werden (siehe Computer-Ausdruck).

Im Computer-Ausdruck werden nach einigen statistischen Kennwerten (Anzahl der Ausreißer, F-Wert, Fehlerquadratsummenminimum, Standardabweichung  $S$ , Spannweite  $R$  der Residuen) die Schätzwerte der Parameter  $a_1, \dots, a_4$  nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate und die zugehörigen 90-%-Konfidenzgrenzen ausgedrückt. Danach werden aus Gründen der Übersichtlichkeit die Werte von  $a_1$  noch einmal als Werte für den Sättigungsgrad wiederholt. Anschließend werden in einer Tabelle für alle erfaßten Stichtage Beobachtungswerte, Regressionswerte sowie die Residuen angegeben. Für die Stichtage (1. Juli) der Jahre 1975, 1980, 1985, 1990, 1995 und 2000 werden unmittelbar anschließend die nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate geschätzten Regressionswerte, ihre 90-%-Konfidenzgrenzen (MIN, MAX) und die Breite des Konfidenzintervalles ( $D = MAX - MIN$ ) wiedergegeben. Abschließend folgen noch Angaben über den Bereich des Wendepunktes (WP).

<sup>16)</sup> Vgl. Beale, E. M. L., Confidence Regions . . . , a.a.O.

<sup>17)</sup> Ebenda.

Computer-Ausdruck:

### BUNDESGBEIT

ANZAHL DER AUSREISSER = 0 ,  $F(0.900, 4, 20) = 2.2489$   
 FEHLERQUADRATSUMME = 183.61 (PKW+K/1000E)\*\*2  
 $S = 3.0$  PKW+K/1000E ,  $R = 11.3$  PKW+K/1000E

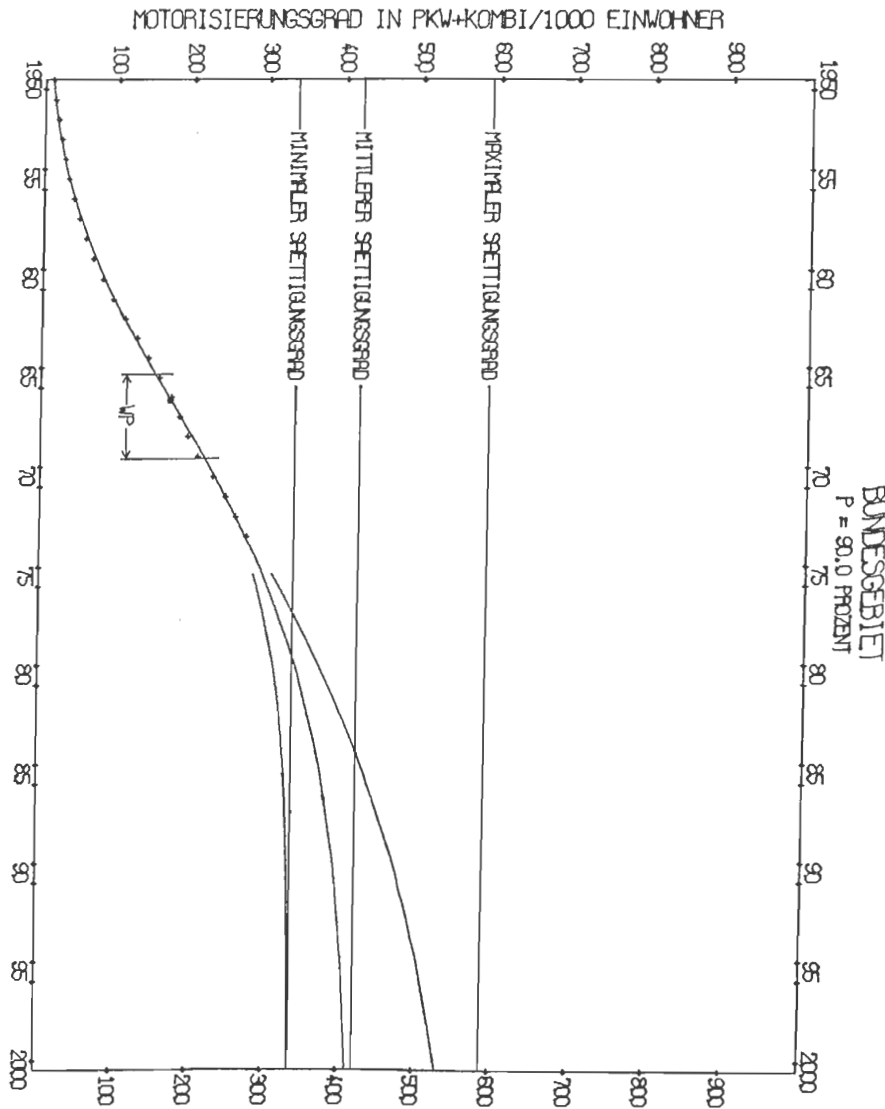
A(1) = 0.42126E 03 ( 0.33646E 03 - 0.58784E 03 )  
 A(2) = 0.16977E 01 ( 0.14556E 01 - 0.21425E 01 )  
 A(3) = 0.89290E 00 ( 0.83415E 00 - 0.92928E 00 )  
 A(4) = 0.39460E 01 ( 0.12242E 01 - UNENDLICH )

SAETTIGUNGSGRAD = 421.3 ( 336.5 - 587.8 ) PKW+K/1000E

STICHTAG	MOTORISIERUNGSGRAD (PKW+KOMBI/1000E)			KONFIDENZINTERVALLE (PKW+KOMBI/1000E)		
	BEOB.	REGR.	RES.	MIN	MAX	D
1. 7.1950	10.8	10.0	-0.8	*****	*****	*****
1. 7.1951	14.2	13.0	-1.1	*****	*****	*****
1. 7.1952	18.6	16.8	-1.7	*****	*****	*****
1. 7.1953	23.0	21.4	-1.6	*****	*****	*****
1. 7.1954	28.2	27.0	-1.2	*****	*****	*****
1. 7.1955	33.3	33.6	0.2	*****	*****	*****
1. 7.1956	40.3	41.2	0.9	*****	*****	*****
1. 7.1957	48.2	50.0	1.8	*****	*****	*****
1. 7.1958	57.0	59.9	2.9	*****	*****	*****
1. 7.1959	67.2	70.9	3.7	*****	*****	*****
1. 7.1960	81.0	82.9	1.9	*****	*****	*****
1. 7.1961	95.1	95.9	0.7	*****	*****	*****
1. 7.1962	111.5	109.6	-1.8	*****	*****	*****
1. 7.1963	127.3	124.1	-3.2	*****	*****	*****
1. 7.1964	142.8	139.1	-3.6	*****	*****	*****
1. 7.1965	158.2	154.5	-3.6	*****	*****	*****
1. 7.1966	174.3	170.1	-4.2	*****	*****	*****
1. 7.1967	185.6	185.7	0.1	*****	*****	*****
1. 7.1968	196.2	201.2	5.0	*****	*****	*****
1. 7.1969	209.2	216.4	7.1	*****	*****	*****
1. 7.1970	229.7	231.2	1.5	*****	*****	*****
1. 7.1971	246.7	245.5	-1.2	*****	*****	*****
1. 7.1972	260.3	259.2	-1.1	*****	*****	*****
1. 7.1973	274.7	272.3	-2.4	*****	*****	*****
1. 7.1975	*****	296.4	**	284.3	308.6	24.3
1. 7.1980	*****	343.7	**	313.4	376.0	62.7
1. 7.1985	*****	374.8	**	326.7	431.3	104.6
1. 7.1990	*****	394.1	**	332.4	474.4	142.0
1. 7.1995	*****	405.6	**	334.8	506.7	171.9
1. 7.2000	*****	412.3	**	335.8	530.4	194.6

WP = 1. 9.1966 (11. 5.1965 - 6. 8.1969)  
 MIT 172.8 ( 154.8 - 216.3 ) PKW+K/1000E

Abbildung 4: Plotter-Darstellung



Das Rechenergebnis ist in Abb. 4 graphisch dargestellt. »MITTLERER SÄTTIGUNGSGRAD« entspricht darin dem Schätzwert des Fehlerquadratsummenminimums, »MINIMALER SÄTTIGUNGSGRAD« und »MAXIMALER SÄTTIGUNGSGRAD« entsprechen den 90-%-Konfidenzgrenzen. »WP« repräsentiert den Bereich des Wendepunktes.

Als wesentliches Ergebnis ist festzuhalten, daß sich nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate (auch bei allen Bundesländern) Parameterkonstellationen ergaben, die ein Sättigungswachstum bewirken, obwohl diese Konstellationen nicht vorausgesetzt worden waren. Der durch die durchgeführte Regressionsrechnung erfaßte langfristige Trend wird von einer Schwingung überlagert, die zweifellos mit dem Konjunkturverlauf in engem Zusammenhang steht.

Die Größe der Konfidenzintervalle für prognostizierte Funktionswerte nimmt mit zunehmender Zeit zu und nähert sich asymptotisch dem endlichen Höchstwert des Konfidenzintervalles an der Stelle  $t \rightarrow \infty$ , also dem Wert des Konfidenzintervalles für den Sättigungsgrad.

Aus den Erfahrungen beim Austesten der Programme kann berichtet werden, daß insbesondere bei der Ermittlung der Konfidenzgrenzen beträchtliche numerische Schwierigkeiten auftraten. Das Iterationsverfahren wird gerade durch die Hinzunahme des variablen Exponenten (k) als weiteren (stochastischen) Regressionskoeffizienten ( $a_4$ ) äußerst empfindlich und erfordert neben der in Abschnitt 6 angegebenen formelmäßigen Behandlung auch eine ziemlich aufwendige, programminterne Entscheidungslogik, da bei der geforderten Konfidenzwahrscheinlichkeit von  $P = 90\%$  von einem auch nur annähernd linearen Verhalten des Parameters  $a_4$  keineswegs mehr die Rede sein kann.

Aufgrund des weitgehend objektivierten Verfahrens und der daraus erhaltenen durchaus plausiblen Ergebnisse kann geschlossen werden, daß sich eine Trendprognose unter Heranziehung des Verfahrens der echt nichtlinearen Regression mit Hilfe einer verallgemeinerten Wachstumsfunktion gut zur stochastischen Beschreibung der zukünftigen PKW-Motorisierung eignet, sofern man neben den Schätzwerten für gesuchte Funktionen auch deren Konfidenzgrenzen ermittelt. Es muß somit die Aussage:

»Die Entwicklung der privaten Motorisierung ist nicht, wie bisher zumeist unterstellt, trendabhängig, sondern abhängig von der Entwicklung des Realeinkommens<sup>18)</sup>« wesentlich korrigiert werden. Da nachgewiesenermaßen<sup>19)</sup> volkswirtschaftliche Einflußgrößen ihrerseits hochgradig mit der Zeit autokorreliert sind, ist es relativ gleichgültig, ob die Zeit selbst oder eine solche makroökonomische Determinante als unabhängige Variable in einem Wachstumsmodell benutzt wird. (Letztere müßte übrigens für Prognosezwecke ihrerseits prognostiziert werden). Die unplausiblen Ergebnisse, die *Sarrazin*, *Spreer* und *Tietzel* aus der reinen Trendberechnung mit der einfachen logistischen Funktion erhalten und die zu der zitierten Aussage führen, scheinen somit vor allem darauf zurückgeführt werden zu können, daß (wie übrigens in allen bisherigen Untersuchungen) sämtliche Berechnungen erst nach Transformation der logistischen Funktion in einen linearen Zusammenhang erfolgen. Wie die vorliegende Untersuchung für eine verallgemeinerte Wachstumsfunktion zeigt, ist es weder erforderlich, einen solchen linearen Zusammenhang künstlich zu konstruieren, noch ist es notwendig, den Sättigungsgrad exogen vorzugeben.

<sup>18)</sup> *Sarrazin, T., Spreer, F., Tietzel, M.*, Die Sättigungsgrenze . . . , a.a.O., S. 161.

<sup>19)</sup> Vgl. *Gerber, F., Ranft, B.*, Motorisierungsprognose . . . , a.a.O.



### 8. Zusammenfassung

Zum Zweck der Prognostizierung der PKW-Motorisierung wird eine Trendprognose auf der Basis einer verallgemeinerten Wachstumsfunktion unter Anwendung der echt nichtlinearen Regression mit Hilfe des Prinzips der kleinsten Quadrate und bei endogener Ermittlung des Sättigungsgrades erstellt. Diese Gesamtmethodik bietet folgende Vorteile:

- Das gewählte Modell gewährleistet, daß sich potentiell sowohl ein unbeschränktes Wachstum als auch ein Sättigungswachstum einstellen kann. Es wird somit ein zusätzliches Indiz bezüglich der Existenz eines Sättigungsgrades angeboten.
- Alle Modellparameter (einschließlich des Sättigungsgrades  $a_1$  und des »Gleitmaßparameters«  $a_2$ ) lassen sich endogen, simultan, gleichwertig und mit gleicher Genauigkeit ermitteln. Eine exogene Festsetzung des Sättigungsgrades wird damit entbehrlich.
- Durch endogene Ermittlung wahrscheinlichkeitsabhängiger Konfidenzintervalle für sämtliche Prognosewerte wird eine echte Quantifizierung der stochastischen Betrachtungsweise ermöglicht.
- Da durch endogene Berechnung subjektive Einflüsse weitgehend reduziert werden, stellt diese Vorgehensweise im Vergleich zu vielen bisherigen Untersuchungen eine Objektivierung dar.
- Die speziell gewählte mathematische Form für die verallgemeinerte Wachstumsfunktion gewährleistete eine Konvergenz bei den angewendeten Iterationsverfahren in allen untersuchten Fällen.

Praktisch durchgeführt wurden die Berechnungen für die einzelnen Bundesländer und das gesamte Bundesgebiet der Bundesrepublik Deutschland einschließlich Berlin (West). Aus Platzgründen konnten hier jedoch nur die Ergebnisse für das Bundesgebiet insgesamt wiedergegeben werden.

Die hier aufgezeigte Methodik ist bei Vorliegen einer ausreichenden Zeitreihe (mindestens ca. 20 Beobachtungen) allgemein anwendbar; daher wurden die erforderlichen Programme so variabel gehalten, daß sie auch unverändert zur Erstellung von PKW-Motorisierungsprognosen anderer Gebiete (Staaten, Länder, Bezirke) herangezogen werden können.

### Summary

For the purpose of forecasting the motorcar motorization rate, a trend forecast is prepared by means of a growth function being generalized versus the logistical function. The level of saturation is determined endogenously by means of the non-linear regression according to the principle of least squares. Confidence probability intervals are mapped on each value forecasted. The specific realization of this forecast refers to the motorcar motorization rate in the Federal Republic of Germany. The procedure proper, however, is neither limited to certain regions nor to motorcars but may be used generally to describe growths of certain characteristics.

### Résumé

En vue de la prévision du degré de motorisation en voitures de tourisme on exécute une prévision de tendance à l'aide d'une fonction de croissance généralisée par rapport à la fonction logistique. Le degré de saturation est déterminé de façon endogène à l'aide de la régression non linéaire selon le principe des plus petits carrés. Pour chaque valeur prévisionnelle il sera indiqué des intervalles de probabilité de confiance. L'exécution concrète de cette prévision a lieu en République Fédérale d'Allemagne pour déterminer le degré de motorisation en voitures de tourisme. Le procédé n'est cependant pas limité à des régions déterminées ou aux voitures de tourisme, mais peut être utilisé de façon générale pour la description de processus de croissance de certaines caractéristiques.