Summary

Based on a nationwide input output analysis utilizing sectorial employment coefficients, the effects of road construction investments on production and employment were assessed. To find out the employment differences resulting from the intensity of labor employment of road construction projects, cost estimates from a number of selected construction companies were additionally evaluated. The employment effects of an investment scheme of DM one billion vary between 12,000 (autobahn construction project) and 29,000 jobs (installation of utility lines). Road construction projects within urban areas, road projects in newly development residential areas and street schemes in pedestrian areas have relâtively high effects on the employment situation. Low effects are associated with the construction of autobahns, state highways and by-passes. The effects on employment of infrastructure projects on the railroad sector are estimated at 19,000 jobs, on the public transport sector 20,000 jobs. Compared with the average effects on employment in public investment projects, estimated at 19,300 jobs in a previous study, road construction projects produce disproportionately high effects on employment in important sectors.

Résumé

Sur la base d'une analyse input-output pour la République fédérale d'Allemagne et en utilisant les coefficients de travail sectoriels, les effets des investissements de la construction routière sur la production et sur l'emploi ont été calculés.

Afin de chiffrer les différences des taux d'emploi suivant l'intensité de travail des projets de construction routière, des calculs de coûts d'un certain nombre d'etreprises de construction ont été en outre évalués. Pour un volume d'investissement d'un milliard de DM, les effets varient entre 12.000 personnes (pour la construction d'une autoroute) et 29.000 personnes (pour l'installation de conduites d'approvisionnement). La construction de routes au sein d'agglomérations, dans des régions à urbaniser et des zones piétionnières ont des effets relativement élevés sur la situation de l'emploi. Peu d'effet a la construction d'autoroutes, de routes départementales et de voies de contournement. En ce qui concerne les projets d'infrastructure sur le secteur des chemins de fer, les effets sur l'emploi se chiffrent à 19.000 personnes, pour les projets des transports publics 20.000 personnes. En se basant sur des analyses précédentes de la moyenne des investissements d'état et un emploi de 19.300 personnes, la construction routière a un effet sur l'emploi au-dessus de la moyenne dans des secteurs importants.

Ein Verfahren zur Beurteilung von Rangstabilitäten in der Nutzwertanalyse

VON PETER CERWENKA, BASEL

1. Problemstellung

Mit Hilfe der Nutzwertanalyse können bekanntlich Handlungsalternativen in eine Präferenzordnung gebracht werden. Das Entscheidungskalkül ist dabei eine aus Mengen- und Wertgerüst aggregierte Größe, der Nutzwert. Für die Aggregierung zum Nutzwert einer Alternative j gibt es mehrere plausible Möglichkeiten, von denen keine allgemein eindeutig überlegen ist. Als sehr anschaulich, gut handhabbar und für viele Fälle geeignet hat sich die additive Wertsynthese erwiesen. Nimmt man an, daß ein für eine Aufgabenstellung relevanter Zielkatalog aus m Kriterien besteht und bezeichnet man den Zielerreichungsgrad von Kriterium i für Alternative j mit z_{ij} und das Kriteriengewicht für Kriterium i mit g_i, so läßt sich diese Aggregierungsform bekanntlich wie folgt anschreiben:

$$N_j = \frac{1}{C} \cdot \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \cdot g_i \qquad (1)$$

$$\text{mit } C = \sum_{i=1}^{m} g_i$$

C wird üblicherweise mit 100 angesetzt. Das Wertgerüst ist dabei durch zwei Vorgänge eingeflossen:

- Die Zielerreichungsgrade z_{ij} kann man sich als Ergebnis eines Benotungsvorganges vorstellen, der darin besteht, daß die Komponenten des ursprünglichen Mengengerüstes, die Zielerträge x_{ij}, mit Hilfe von Nutzenfunktionen in eine endliche einheitliche Skala abgebildet werden.
- Die Kriteriengewichte g_i erhält man aus einem Gewichtungsvorgang, an dem sich in der Regel mehrere Personen beteiligen, die entweder entscheidungsverantwortlich oder sonstwie entscheidungsbetroffen sind.

Sind die beiden Vorgänge durchgeführt, so erhält man daraus die Nutzwerte für die Alternativen. Die Reihung der Nutzwerte der Größe nach ergibt dann die Präferenzordnung.

Anschrift des Verfassers:
Univ.-Doz. Dr. Peter Cerwenka
Prognos AG
Steinengraben 42
CH-4011 Basel

In den meisten Nutzwertanalysen interessiert man sich aber nicht nur für die Präferenzordnung selbst, sondern auch für deren Stabilität. Zu diesem Zwecke wird üblicherweise eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, d. h., in der Regel werden die Nutzwerte mit Hilfe verschiedener Sätze von Kriteriengewichten, die von verschiedenen Personen stammen, wiederholt ermittelt, und dabei wird festgestellt, ob sich die Präferenzordnung ändert oder nicht. Oft werden auch Gewichtsmittelwerte mehrerer Personen herangezogen, von denen dann in gewissen Stufen systematisch abgewichen und wiederum die Stabilität der Präferenzordnung festgestellt wird. Erschwerend wirkt sich in letzterem Fall aus, daß wegen der konstanten Gewichtssumme von C eine Änderung in e i n e m Kriteriengewicht zugleich eine Änderung in mindestens einem anderen Kriteriengewicht bewirkt. Außerdem sind unendlich viele Konstellationen von Gewichtsveränderungen möglich, von denen oft ein erheblicher Anteil unnötiger Zahlenballast ist, der die Sensitivitätsanalyse unübersichtlich und verwirrend erscheinen lassen kann.

Dieser Umstand, der in einem konkreten Anwendungsfall[1)] besonders akut wurde, hat zur Neuentwicklung einer Prüfgröße geführt, die nachfolgend als „Stabilitätsmaß" bezeichnet und mit dem Symbol „SM" versehen wird. Ihrer Definition, konkreten Ermittlung und Interpretation ist der vorliegende Beitrag gewidmet.

2. Interpretationsvorgaben für ein Stabilitätsmaß

Das zu definierende Stabilitätsmaß SM möge in einem normierten Wertebereich [0 ; 1] liegen, dessen Randwerte SM=0 und SM=1 wie folgt interpretierbar seien:

- Ein Wert SM=0 bedeute, daß jede kleinste Veränderung an irgendeinem Kriteriengewicht das Umkippen einer mit den ursprünglichen Kriteriengewichten ermittelten Rangfolge von Alternativen bewirken würde. (Zunächst wird zur Veranschaulichung die Existenz von nur zwei Alternativen angenommen. Bei mehr als zwei Alternativen muß dann das Stabilitätsmaß paarweise für je zwei rangbenachbarte Alternativen ermittelt werden. Die beiden in die jeweilige Ermittlung von SM einbezogenen Alternativen werden nachfolgend mit den Indizes j=1 und j=2 versehen.) Das Reihungsergebnis ist in diesem Falle absolut instabil.
- Hingegen möge der Wert SM=1 einer Konstellation von Zielerreichungsgraden entsprechen, bei welcher jede beliebige Veränderung der Kriteriengewichte die Beibehaltung der ursprünglichen Rangfolge bewirkt. Dies ist dann der Fall, wenn in allen Kriterien die Differenz der Zielerreichungsgrade zwischen zwei zu reihenden Alternativen dasselbe Vorzeichen hat. Diese Konstellation kann folgerichtig als absolut stabil bezeichnet werden.

Je mehr also SM bei 1 liegt, als desto stabiler kann das Ergebnis angesehen werden. Mit diesen Interpretationsvorgaben kann das Stabilitätsmaß als eine Art Analogon zum Korrelationskoeffizienten der Korrelationsrechnung angesehen werden, der allerdings einen ganz anderen Aussageinhalt hat.

1) Nutzen-Kosten-Untersuchungen zur BAB A26, Untersuchung der Prognos AG im Auftrag der Freien und Hansestadt Hamburg, abgeschlossen Februar 1981.

3. Definition des Stabilitätsmaßes

Aufgrund der Interpretationsvorgaben wird das Stabilitätsmaß in nachstehender Weise definiert.

Wenn man mit g_i (i=1, . . . , m) die erhobenen und damit vorliegenden Kriteriengewichte eines bestimmten Bewerters für die m Kriterien in der untersten Ebene des Zielsystems bezeichnet und mit w_i (i=1, . . . , m) eine veränderte Konstellation von zunächst unbekannten Kriteriengewichten, die das Umkippen einer Reihung von zwei Alternativen (A_1 und A_2) bewirken würde, so ist ein charakteristischer Fall einer veränderten Konstellation dadurch definierbar, daß man die m i n i m a l e Konstellationsveränderung ermittelt. Als Konstellationsveränderung wird die Quadratsumme der Abweichungen

$$Q = \sum_{i=1}^{m} (g_i - w_i)^2 \tag{2}$$

vereinbart. Diese Größe soll also minimiert werden:

$$Q_{min} = \text{Min} \left[\sum_{i=1}^{m} (g_i - w_i)^2 \right] \tag{3}$$

Dabei gelten noch die definitorischen Randbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = C$$

$$\text{und} \sum_{i=1}^{m} w_i = C \tag{4}$$

Für den Fall, daß eine mit den ursprünglichen Kriteriengewichten g_i ermittelte Rangfolge von zwei Alternativen (A_1 und A_2) g e r a d e umkippen soll, gilt ferner, daß die mit den veränderten Kriteriengewichten w_i zu ermittelnden Nutzwerte NW_1 und NW_2 gleich groß werden:

$$NW_1 = NW_2$$

Setzt man dafür analog zu Gleichung (1) definitionsgemäß

$$NW_1 = \frac{1}{C} \cdot \sum_{i=1}^{m} z_{i1} \cdot w_i \quad \text{und} \quad NW_2 = \frac{1}{C} \cdot \sum_{i=1}^{m} z_{i2} \cdot w_i$$

ein, so lautet mit der abkürzenden Schreibweise für die Differenz der Zielerreichungsgrade

$$\Delta z_i = z_{i1} - z_{i2}$$

die zusätzliche Randbedingung:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i \cdot w_i = 0 \tag{5}$$

Schließlich gilt natürlich für die veränderten Kriteriengewichte w_i (wie auch für die ursprünglichen Kriteriengewichte g_i), daß sie alle nichtnegativ sein müssen:

$$w_i \geqslant 0 \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{6}$$

Damit liegt ein typisches Problem der quadratischen Planungsrechnung vor: Eine (in allen w_i) quadratische Zielfunktion (Q) soll unter Einhaltung von Randbedingungen, die in Form der (in allen w_i) linearen Gleichungen (4) und (5) u n d in Form der (in allen w_i) linearen Ungleichungen (6) auftreten, einen extremen Wert annehmen. Ein für die vorliegende Problemstellung praktikabler Lösungsweg wird im nächsten Abschnitt angegeben. Das Ergebnis ist der gesuchte Satz von minimal veränderten Kriteriengewichten w_i (i=1, . . . , m), der gerade ein Umkippen der Rangfolge bewirken würde. Sie werden daher als ,,Kippgewichte" bezeichnet.

Ein weiterer charakteristischer Fall einer veränderten Konstellation von Kriteriengewichten ist dadurch definierbar, daß man die m a x i m a l e Konstellationsveränderung ermittelt, die ebenfalls g e r a d e ein Umkippen der Rangfolge bewirken würde. In diesem Fall ist unter Einhaltung derselben Randbedingungen (4), (5) und (6) das Maximum von Q

$$Q_{max} = \mathrm{Max}\ [\sum_{i=1}^{m} (g_i - w_i)^2]$$

zu ermitteln, wofür ebenfalls im nächsten Abschnitt ein praktikabler Lösungsweg angegeben wird.

Als im genannten Sinne interpretierbares Stabilitätsmaß SM läßt sich mit den Werten Q_{min} und Q_{max} die Größe

$$SM = \sqrt{Q_{min} / Q_{max}} \tag{7}$$

vereinbaren. Das Stabilitätsmaß ist damit als Quotient aus einer minimalen und einer maximalen Standardabweichung von Kriteriengewichten definiert.

Für den Fall, daß alle Zielerreichungsgraddifferenzen Δz_i (i=1, . . . , m) dasselbe Vorzeichen haben (eine Alternative wäre dann in allen Kriterien besser als die andere), gibt es weder für Q_{min} noch für Q_{max} eine Lösung, weil die Rangfolge in diesem Fall nicht umschlagen kann, welche Kriteriengewichte auch immer verteilt würden. In diesem Fall ist vereinbarungsgemäß SM= 1 zu setzen, da dieser Fall absolute Stabilität repräsentiert.

4. Berechnung der extremen Konstellationsveränderungen (Q_{min} und Q_{max})

Beide extremen Konstellationsveränderungen, Q_{min} und Q_{max}, ließen sich grundsätzlich mit einem für die quadratische Planungsrechnung erweiterten Simplex-Algorithmus von *Wolfe*[1] berechnen, zumal hierfür sogar ein fertiges FORTRAN-Programm[2] allgemein verfügbar ist. Allerdings nimmt die Rechenzeit mit zunehmender Kriterienanzahl sehr stark zu. Da im konkreten Anlaßfall, der im nächsten Abschnitt auszugsweise beschrieben wird, die unterste Ebene des Zielsystems aus 20 Kriterien bestand und eine Vielzahl von Gewichtssätzen verschiedener Bewerter aus verschiedenen Gewichtungsrunden vorlag, wurde ein anderes Verfahren entwickelt, das nachfolgend beschrieben wird.

4.1 Minimale Konstellationsveränderung (Q_{min})

Läßt man zunächst die Ungleichungen der Nichtnegativitätsbedingungen (6) außer acht, so reduziert sich die Problemstellung darauf, die Konstellationsveränderung Q nach (2) unter Einhaltung der als Gleichungen vorliegenden Nebenbedingungen (4) und (5) zu minimieren. Diese Aufgabe läßt sich durch Einführung der Lagrange-Multiplikatoren hier explizit lösen. Die Anzahl der Multiplikatoren entspricht bekanntlich der Anzahl der Nebenbedingungen; somit sind hier zwei solcher Multiplikatoren, λ_1 und λ_2, einzuführen: λ_1 für die Nebenbedingung (4) und λ_2 für die Nebenbedingung (5). Nach Durchführung des nebenbedingten Optimierungsalgorithmus erhält man für λ_1 und λ_2 mit dem Hilfswert

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{m} \Delta z_i^2 - \frac{1}{m} \cdot (\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i)^2 : \\ \lambda_1 &= (\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i \cdot g_i) \cdot (\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i) / (m \cdot H) \\ \lambda_2 &= -(\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i \cdot g_i) / H \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und für die gesuchten minimal veränderten Kriteriengewichte w_i:

$$w_i = g_i + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot \Delta z_i \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{9}$$

Die minimale Konstellationsveränderung Q_{min} erhält man durch Einsetzen von (8) in (9) und von (9) in (2) zu:

$$Q_{min} = (\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i \cdot g_i)^2 / H \tag{10}$$

1) *Wolfe, P.*, The Simplex Method for Quadratic Programming, in: Econometrica, Vol. 27 (1959), Nr. 3, S. 382–398.

2) *Kuester, J. L., Mize, J. H.*, Optimization Techniques with Fortran, New York 1973.

Stellt sich bei der Berechnung von w_i gemäß (9) heraus, daß sich alle w_i $(i=1, \ldots, m)$ nichtnegativ ergeben, so ist die Berechnung von Q_{min} abgeschlossen, da die vorerst außer acht gelassenen Nichtnegativitätsbedingungen (6) offensichtlich ohnehin erfüllt sind und somit nicht restriktiv wirken. Ergibt sich jedoch mindestens ein Wert w_i negativ, so ist dies ein Zeichen dafür, daß mindestens eine Nichtnegativitätsbedingung von (6) greift und somit gemäß der quadratischen Planungsrechnung mindestens ein Wert w_i zu Null gesetzt werden muß. Zu diesem Zweck wird das Gesamtkollektiv der m Kriterien in zwei Teilkollektive zerlegt: in ein Teilkollektiv von m1 Kriterien (Index i1), die positive veränderte Kriteriengewichte erhalten, und in ein weiteres Teilkollektiv von m2 Kriterien (Index i2), deren veränderte Kriteriengewichte zu Null gesetzt werden (m1 + m2 = m).

Nach dieser Prozedur erhält man für λ_1 und λ_2 mit dem Hilfswert

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum_{i1} \Delta z_{i1}^2 - \frac{1}{m1} \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}\Big)^2 ; \\ \lambda_1 &= \Big[\Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot g_{i1}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}\Big) + \Big(\sum_{i2} g_{i2}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}^2\Big)\Big] / (m1 \cdot H) \\ \lambda_2 &= -\Big[\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot g_{i1} + \Big(\sum_{i2} g_{i2}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}\Big) / m1\Big] / H \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

und für die neuen Kriteriengewichte w_i:

$$\left.\begin{aligned} &- \text{für Kollektiv mit Index i1: } w_{i1} = g_{i1} + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot \Delta z_{i1} \\ &- \text{für Kollektiv mit Index i2: } w_{i2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die zugehörige minimale Konstellationsveränderung Q_{min} erhält man durch Einsetzen von (11) in (12) und von (12) in (2) zu:

$$Q_{min} = \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot g_{i1}\Big)^2 / H + \sum_{i2} g_{i2}^2 + \Big(\sum_{i2} g_{i2}\Big) \cdot \Big[\Big(\sum_{i2} g_{i2}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}^2\Big) + 2 \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot g_{i1}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}\Big)\Big] / (m1 \cdot H) \quad (13)$$

Ist die Menge der Kriterien mit Index i2 leer (m2=0; alle Kriteriengewichte sind positiv), so geht naturgemäß (13) in (10) über.

Die noch offene heikle Frage ist nun die, wie man zur richtigen Zerlegung des Kollektivs kommt, d.h. zu jener, bei der letztlich kein negatives w_i mehr vorkommt und bei der zugleich jede andere Konstellation von nichtnegativen w_i einen größeren Wert für Q ergäbe.

Folgender iterativer Algorithmus hat sich in allen untersuchten Fällen als zielführend und rationell erwiesen:

(a) Berechne H, λ_1 und λ_2 nach (8) und damit alle w_i nach (9).

(b) Prüfe, ob sich negative w_i ergeben haben. Ist dies nicht der Fall, so berechne Q_{min} nach (10). Es ist dann der gesuchte Wert: Ende des Algorithmus. Haben sich jedoch negative w_i eingestellt, so gehe nach (c).

(c) Teile das Kollektiv aus m Kriterien so in zwei Teile, daß das eine Teilkollektiv (Index i1) jene m1 Kriterien enthält, die sich nichtnegativ ergeben haben, und daß das andere Teilkollektiv (Index i2) jene m2 Kriterien enthält, die sich negativ ergeben haben und jetzt zu Null gesetzt werden (m1 + m2 = m).

(d) Damit berechne H, λ_1 und λ_2 nach (11) und w_i nach (12). Sind nunmehr alle w_i nichtnegativ, so berechne Q_{min} nach (13). Es ist der gesuchte Wert: Ende des Algorithmus. Haben sich hingegen nun neuerliche negative w_i eingestellt (die vereinbarungsgemäß nur aus dem Teilkollektiv mit dem Index i1 stammen können, da alle w_{i2} zu Null gesetzt werden), so löse diese aus dem Teilkollektiv mit dem Index i1 und füge sie dem Teilkollektiv mit dem Index i2 hinzu, setze diese also ebenfalls zu Null. (m2 wird also größer, m1 kleiner.) Damit sind wiederum H, λ_1 und λ_2 nach (11) und w_i nach (12) zu berechnen. Wiederhole (d) solange, bis nur noch nichtnegative w_i übrig bleiben. Dann berechne Q_{min} nach (13).

Der obenstehende Algorithmus hat in allen untersuchten Fällen (das waren etwa 50 mit je 20 Kriterien) ausnahmslos zum Ziele geführt. In allen Fällen war im EDV-Dialogbetrieb eine riesige Fülle von Variationen der Teilkollektive von Kriterien mit Index i1 und Index i2 durchgeführt worden. Stets stellte sich letztendlich jene Aufteilung ein, die sich auch nach dem geschilderten iterativen Algorithmus, allerdings dann wesentlich rascher, ergeben hätte. Der mathematische Beweis für die Allgemeingültigkeit konnte zwar nicht erbracht werden, doch scheint bei der Koeffizientenkonstellation der quadratischen Planungsrechnung, wie sie mit den Beziehungen (3) bis (6) hier vorliegt, der geschilderte Algorithmus das richtige Ergebnis notwendigerweise herbeizuführen.

Abschließend sei noch erwähnt, daß die vorliegende Problemstellung die Konvexitätsbedingungen von *Kuhn* und *Tucker*[1] erfüllt, was zur Folge hat, daß – falls es überhaupt eine Lösung gibt – es stets nur eine Lösung gibt.

4.2 *Maximale Konstellationsveränderung (Q_{max})*

Wie man aus (2) unmittelbar entnehmen kann, würde das Maximum von Q ohne die Randbedingungen (4) bis (6) gegen unendlich streben. Es wird also auf jeden Fall durch die Randbedingungen eingeschränkt; es ist also ein „Randmaximum". Läßt man zunächst Randbedingung (5) außer acht, so kann man aufgrund einfacher logischer Überlegungen unmittelbar zur Einsicht gelangen, daß Q dann ein Maximum ist, wenn alle veränderten Kriteriengewichte bis auf eines zu Null gesetzt werden und eines auf den Maximalwert C gesetzt wird und wenn überdies jenes eine auf C gesetzt wird, dessen

1) *Kuhn, H. W., Tucker, A. W.*, Nonlinear Programming, in: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley 1951, S. 481–492.

ursprüngliches Kriteriengewicht das kleinste aller Kriteriengewichte war. Damit würde sich ein Q_{max} von

$$Q_{max} = \sum_{i=1}^{m} g_i^2 + C^2 - 2 \cdot C \cdot g_{min}$$

ergeben. Randbedingung (5), die bewirkt, daß Q g e r a d e ein Maximum wird, engt dieses Maximum in aller Regel noch weiter ein. Sie erfordert, daß im System ein weiterer Freiheitsgrad eingeführt wird. Dies erfolgt dadurch, daß nicht m-1 Kriteriengewichte zu Null gesetzt werden, sondern m-2. Damit erhält man zwei Freiheitsgrade für die beiden Randbedingungsgleichungen (4) und (5). Für zwei der m neuen Kriteriengewichte, die mit W_a und W_b bezeichnet seien, gilt also gemäß (4) und (5):

$$W_a + W_b = C$$

$$\Delta z_a \cdot W_a + \Delta z_b \cdot W_b = 0 \qquad (14)$$

Daraus erhält man für W_a und W_b:

$$W_a = - C \cdot \frac{\Delta z_b}{\Delta z_a - \Delta z_b} \quad \text{und} \quad W_b = C \cdot \frac{\Delta z_a}{\Delta z_a - \Delta z_b} \qquad (15)$$

Und für Q erhält man:

$$Q = \sum_{i=1}^{m} g_i^2 + (W_a^2 + W_b^2 - 2 \cdot W_a \cdot g_a - 2 \cdot W_b \cdot g_b) = \sum_{i=1}^{m} g_i^2 + \Delta Q$$

Hier gilt es noch jene beiden Indizes a und b aus i zu finden, die Q bzw. ΔQ maximieren, wobei zusätzlich darauf zu achten ist, daß W_a und W_b gemäß (15) nichtnegativ sind:

$$\Delta Q_{max} = \operatorname*{Max}_{a,b} (W_a^2 + W_b^2 - 2 \cdot W_a \cdot g_a - 2 \cdot W_b \cdot g_b) \qquad (16)$$

$$\text{mit} \quad W_a, W_b \geq 0 \qquad (a,b \in i;\ a \neq b)$$

Hier gibt es keine explizite Anschreibmöglichkeit für das Ergebnis, und man muß alle m · (m-1)/2 Kombinationen durchrechnen, um das Maximum zu finden. (Dies ist aber eine bereits sehr reduzierte Anzahl gegenüber den insgesamt m! Möglichkeiten, Nullen auf Kriteriengewichte zu verteilen.[1]) Hat man ΔQ_{max} gefunden, so erhält man Q_{max} zu:

$$Q_{max} = \sum_{i=1}^{m} g_i^2 + \Delta Q_{max} \qquad (17)$$

1) Es bedarf wohl keiner besonderen Hervorhebung, daß das ganze geschilderte Verfahren nur durch EDV-Einsatz zu bewältigen ist.

Wie man aus (14) ersehen kann, können W_a und W_b nur dann positiv sein, wenn Δz_a und Δz_b verschiedenes Vorzeichen haben[1]. Daher gibt es – wie bereits in Abschnitt 3 erwähnt – für Q_{max} (und damit auch für Q_{min}) keine Lösung, wenn alle Δz_i gleiches Vorzeichen haben. Dieser Zustand bedeutet zugleich vereinbarungsgemäß absolute Stabilität, d. h., das Stabilitätsmaß gemäß (7) ist in diesem Fall SM=1 zu setzen.

5. Eine Ausweitung des Verfahrens

In konkreten Anwendungsfällen stellt sich nicht nur die Aufgabe, die Stabilität eines Einzelbewertungsergebnisses zu prüfen, sondern auch die Stabilität der Reihungsergebnisse von ganzen Bewertungsrunden.

Wenn eine Bewertungsrunde aus K gewichtverteilenden Bewertern besteht, so kann die Konstellationsveränderung $\overline{Q}$ analog zu (2) mit

g_{ki} ... Kriteriengewicht des Bewerters k für Kriterium i (k=1, ..., K; i=1, ..., m)

wie folgt angeschrieben werden:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} (g_{ki} - \overline{w}_i)^2$$

Minimiert man diese Größe, so erhält man wiederum die im Zähler von (7) enthaltene Größe, die hier mit $\overline{Q}_{min}$ bezeichnet sei:

$$\overline{Q}_{min} = \text{Min} \left[\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} (g_{ki} - \overline{w}_i)^2 \right]$$

Hierin bedeuten $\overline{w}_i$ die in Abschnitt 3 als Kippgewichte bezeichneten veränderten Kriteriengewichte, die zunächst wiederum unbekannt sind. Die Randbedingungen (4), (5) und (6) bleiben wie bisher erhalten, wobei jedoch $\overline{w}_i$ für w_i einzusetzen ist. Ebenso läßt sich die maximale Konstellationsveränderung $\overline{Q}_{max}$ anschreiben:

$$\overline{Q}_{max} = \text{Max} \left[\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} (g_{ki} - \overline{w}_i)^2 \right]$$

Damit ergibt sich das Stabilitätsmaß analog zu (7):

$$\overline{SM} = \sqrt{\overline{Q}_{min} / \overline{Q}_{max}}$$

1) Diese Eigenschaft kann sehr sinnvoll dazu herangezogen werden, die m . (m-1)/2 Kombinationen von W_a und W_b weiter zu reduzieren. Haben etwa je m/2 Kriterien in den Zielerreichungsgraddifferenzen positives bzw. negatives Vorzeichen, so beträgt die Anzahl der Kombinationen nur noch $m^2/4$.

Die konkrete Berechnung von $\overline{Q}_{min}$ und $\overline{Q}_{max}$ ist mit folgenden Änderungen analog zu den Unterabschnitten 4.1 und 4.2 durchzuführen.

Gegenüber Unterabschnitt 4.1 ergeben sich mit den arithmetischen Mittelwerten $\bar{g}_i$ aus den jeweils K Kriteriengewichten g_{ki} für jedes Kriterium i

$$\bar{g}_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} g_{ki}$$

folgende Modifikationen bisheriger Formeln:

- In (8) ist mit unverändertem H in λ_1 und λ_2 überall $\bar{g}_i$ statt g_i einzusetzen, ebenso in (9), wo auch w_i durch $\bar{w}_i$ zu ersetzen ist.
- Formel (10) für Q_{min} ist mit unverändertem H zu ersetzen durch:

$$\overline{Q}_{min} = K \cdot \Big(\sum_{i=1}^{m} \Delta z_i \cdot \bar{g}_i\Big)^2 / H$$

- Nach Aufteilung des Kriterienkollektivs in ein Teilkollektiv (Index i1) mit m1 Kriterien und K · m1 Kriteriengewichten g_{ki1} und in ein Teilkollektiv (Index i2) mit m2 Kriterien und K · m2 Kriteriengewichten g_{ki2} sind mit

$$\bar{g}_{i1} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} g_{ki1} \quad \text{und} \quad \bar{g}_{i2} = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} g_{ki2}$$

in (11) bei unverändertem H in λ_1 und λ_2 alle Werte g_{i1} bzw. g_{i2} durch $\bar{g}_{i1}$ bzw. $\bar{g}_{i2}$ zu ersetzen, ebenso in (12), wo zusätzlich w_{i1} durch $\bar{w}_{i1}$ und w_{i2} durch $\bar{w}_{i2}$ auszutauschen ist.

- Formel (13) für Q_{min} ist schließlich mit unverändertem H durch folgende zu ersetzen:

$$\overline{Q}_{min} = K \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot \bar{g}_{i1}\Big)^2 / H + \sum_{k=1}^{K} \sum_{i2} g_{ki2}^2 + K \cdot \Big(\sum_{i2} \bar{g}_{i2}\Big) \cdot \Big[\Big(\sum_{i2} \bar{g}_{i2}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}^2\Big) + 2 \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1} \cdot \bar{g}_{i1}\Big) \cdot \Big(\sum_{i1} \Delta z_{i1}\Big)\Big] / (m1 \cdot H)$$

In Unterabschnitt 4.2 ist überall $\overline{W}_a$ bzw. $\overline{W}_b$ für W_a bzw. W_b einzusetzen, ferner für g_a bzw. g_b die Größen

$$\bar{g}_a = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} g_{ka} \quad \text{bzw.} \quad \bar{g}_b = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=1}^{K} g_{kb}$$

und für Q_{max} die Größe

$$\overline{Q}_{max} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{m} g_{ki}^2 + K \cdot \Delta Q_{max}.$$

6. Beispiel für das Stabilitätsmaß einer Einzelbewertung

Das folgende Beispiel ist jener bereits zitierten Hamburger Untersuchung entnommen, die auch die Anregung zur Entwicklung des Stabilitätsmaßes lieferte. Die Aufgabenstellung bestand darin, eine Entscheidungshilfe dafür zu liefern, ob ein bestimmtes Teilstück der geplanten Bundesautobahn A26 im Grenzbereich zwischen Hamburg und Niedersachsen unterlassen (Alternative A_1) oder gebaut (Alternative A_2) werden soll. Das Zielsystem war hierarchisiert und in der obersten Ebene unter anderem in die drei Kriteriengruppen

- A: Aspekte der Benutzer
- B: Aspekte der Anrainer
- C: Aspekte der Allgemeinheit

gegliedert[1]. Das Zielsystem, das in der untersten Ebene 20 Kriterien enthält, ist mit den zugehörigen Zielerreichungsgraden[2] z_{i1} und z_{i2} und $\Delta z_i = z_{i1} - z_{i2}$ in folgender Tabelle 1 dargestellt. Die Zielerreichungsgrade sind dabei in einer Skala von 0 bis 100 Nutzenpunkten definiert, wobei 0 den Schlechtestwert und 100 den Bestwert markiert.

Ebenfalls enthalten sind in Tabelle 1 die von einem der 12 Bewerter in einer Gewichtungsrunde vergebenen Kriteriengewichte in der untersten Zielebene, die gleichfalls Werte von 0 bis C = 100 annehmen können. Mit diesen Werten stellt sich gemäß (1) für Alternative 1 ein Nutzwert von N_1 = 48,68 Nutzenpunkten und für Alternative 2 ein Nutzwert von N_2 = 64,72 Nutzenpunkten ein, so daß für diese Bewertung Alternative A_2 höherwertig eingeschätzt wird.

Die nachfolgende Tabelle 2 zeigt das Teilergebnis von Unterabschnitt 4.1, nämlich die Kippgewichte w_i, in Gegenüberstellung zu den ursprünglich vergebenen Kriteriengewichten g_i, wobei zusätzlich die Zwischensummen der drei Kriteriengruppen A, B und C ausgewiesen sind.

Man ersieht aus Tabelle 2, daß die Kippgewichte der Kriterien A 2.2, B 5, C 1, C 5 und C 10 Null sind. Sie waren ursprünglich negativ und wurden — wie beschrieben — zu Null gesetzt. Nach dem ersten Schritt des in Unterabschnitt 4.1 beschriebenen iterativen Optimierungsalgorithmus, der in diesem Beispiel insgesamt drei Schritte aufwies, waren nur die Kippgewichte der Kriterien C 1 und C 10 negativ, nach dem zweiten Schritt kamen die Kippgewichte der Kriterien A 2.2, B 5 und C 5 hinzu. Nach dem dritten Schritt wurde kein weiteres Kippgewicht mehr negativ. Nach Ermittlung der Kippgewichte läßt sich Q_{min} entweder über (3) oder aber über (13) ausrechnen[3]. Es hat den Wert:

1) Im Zuge der Sensitivitätsanalyse wurden nicht nur die Kriteriengewichte, sondern es wurde auch die Struktur des Zielsystems variiert.

2) Ihre Ermittlung hat einen Großteil der Arbeiten im Rahmen der genannten Untersuchung ausgemacht. Sie ist jedoch nicht Gegenstand dieses Beitrages.

3) Die Kippgewichte selbst sind nur ein Nebenprodukt der Berechnung. Gleichwohl vermitteln sie aber einen Eindruck von den für ein Umkippen erforderlichen Bewertungsverschiebungen, die als quantitativer Niederschlag des heute im gesellschaftlichen Raum oft als „Wertewandel" bezeichneten Vorganges aufgefaßt werden können.

Tabelle 1:

	Kriterium i	Zielerreichungsgrade z_{i1} (A_1)	z_{i2} (A_2)	Δz_i	g_i
A 1	Kfz-Betriebskosten	85,9	94,4	- 8,5	5
A 2.1	Reisezeiten (Personenverkehr werktags)	70,9	86,9	-16,0	8
A 2.2	Reisezeiten (Personenverkehr sonntags)	69,3	86,2	-16,9	4
A 2.3	Reisezeiten (Güterverkehr)	81,5	91,0	- 9,5	8
A 3	Unfälle	0,0	37,0	-37,0	25
B 1	Lärmeinwirkung auf Anrainer und Schüler	50,6	57,7	- 7,1	9
B 2	Schadgasimmissionen in bebauten Gebieten	64,2	84,9	-20,7	9
B 3	Sichtwirkung auf Wohnbevölkerung	54,0	45,9	+ 8,1	6
B 4	Trennwirkung durch die bauliche Anlage	100,0	79,9	+20,1	3
B 5	Trennwirkung durch den Verkehrsfluß	38,5	54,8	-16,3	3
C 1	Erreichbarkeit von Naherholungsgebieten	29,0	72,6	-43,6	4
C 2	Lärmeinwirkung auf Erholungssuchende	67,9	62,2	+ 5,7	2
C 3	Sichtwirkung auf Erholungssuchende	55,4	46,5	+ 8,9	1
C 4	Energieverbrauch	84,3	91,6	- 7,3	2
C 5	Schadgasemissionen	80,3	91,9	-11,6	2
C 6	Emissionen fester und flüssiger Schadstoffe	50,0	41,6	+ 8,4	2
C 7	Flächenbedarf	52,6	42,9	+ 9,7	1
C 8	Anteil des ÖPNV am Gesamtpersonennahverkehr	55,1	53,1	+ 2,0	2
C 9	Veränderung des Potentials an Beschäftigten und Einwohnern	72,5	54,0	+18,5	2
C10	Verträglichkeit mit der Achsenkonzeption	62,6	87,9	-25,3	2
					100

Tabelle 2:

HAMBURG BAB A26: GEWICHTUNGSRUNDE VOM 25. SEPTEMBER 1980
ZIELSYSTEM BENUTZER(A) - ANRAINER(B) - ALLGEMEINHEIT(C)

KIPPGEWICHTE: BEWERTER B 09

K R I T E R I U M		GEWICHT	I	KIPPGEW.
A 1	KFZ-BETRIEBSKOSTEN	5.00	I	3.43
A 2.1	REISEZEITEN PERS. WERKT.	8.00	I	3.62
A 2.2	REISEZEITEN PERS. SONNT.	4.00	I	.00
A 2.3	REISEZEITEN GUETERVERK.	8.00	I	6.05
A 3	UNFAELLE	25.00	I	12.74
SUMME A		50.00	I	25.84
B 1	LAERM AUF ANRAIN./SCHUE.	9.00	I	7.95
B 2	SCHADGASIMMISSIONEN	9.00	I	2.85
B 3	SICHT AUF WOHNBEVOELK.	6.00	I	10.66
B 4	TRENNWIRKUNG ANLAGE	3.00	I	12.16
B 5	TRENNWIRKUNG VERKEHRSFL.	3.00	I	.00
SUMME B		30.00	I	33.62
C 1	ERREICHBARKEIT NAHERHOL.	4.00	I	.00
C 2	LAERM AUF ERHOLUNGSSUCH.	2.00	I	5.76
C 3	SICHT AUF ERHOLUNGSSUCH.	1.00	I	5.96
C 4	ENERGIEVERBRAUCH	2.00	I	.88
C 5	SCHADGASEMISSIONEN	2.00	I	.00
C 6	EMISSIONEN FEST+FLUESSIG	2.00	I	6.77
C 7	FLAECHENBEDARF	1.00	I	6.26
C 8	OEPNV-ANTEIL	2.00	I	4.37
C 9	POTENTIAL BESCH./EINW.	2.00	I	10.56
C10	ACHSENKONZEPTION	2.00	I	.00
SUMME C		20.00	I	40.54

$Q_{min} = 538{,}1$

Für Q_{max} stellt sich ein Wert von

$Q_{max} = 9.799{,}7$

ein, der sich für a=C 1 und b=C 8 mit

$g_a = 4{,}00$ und $g_b = 2{,}00$ sowie

mit $W_a = 4{,}39$ und $W_b = 95{,}61$ gemäß (15)

mit (16) aus (17) ergibt. Die Kriterien C 1 und C 8 sind also hier jene beiden Kriterien, die mit von Null abweichenden neuen Kriteriengewichten zu versehen sind, damit man Q_{max} erhält.

Damit kann man als Endergebnis SM aus (7) zu

$$SM = \sqrt{538{,}1 / 9.799{,}7} = 0{,}23$$

berechnet werden.

7. Folgerungen und Ausblick

Da das Stabilitätsmaß für die zitierte und im Beispiel skizzierte Aufgabenstellung neu entwickelt wurde, können noch keine verallgemeinerten Erfahrungen vorliegen. So mutet etwa das im Beispiel ermittelte Stabilitätsmaß mit SM=0,23 bei Einordnung in den Definitionsbereich [0 ; 1] relativ gering an, d. h., die vorgenommene Bewertung erscheint dort nicht sehr stabil. Allerdings darf – unter Einbeziehung aller Einzelbewertungen aus der genannten Untersuchung – vermutet werden, daß Problemstellungen etwa mit SM $\geqslant$ 0,5 wegen ihrer dann bereits stark reduzierten Konfliktträchtigkeit überhaupt nicht mehr Gegenstand derartiger Untersuchungen sind, sondern sofort entschieden werden. Das Stabilitätsmaß ist also auch Ausdruck für die Konfliktträchtigkeit der Problemstellung: Ein niedriges Stabilitätsmaß signalisiert hohe Konfliktträchtigkeit, ein hohes niedrige.

Der Nutzenvorsprung ($\Delta N = N_1 - N_2$) einer Alternative A_1 gegenüber einer Alternative A_2 selbst ist für die Beurteilung der Rangstabilität ungeeignet. Beispielsweise könnte bei a l l e n Kriterien der Zielerreichungsgradvorsprung und damit auch der Nutzenvorsprung nur 1 % für eine und dieselbe Alternative betragen; dennoch wäre diese Konstellation völlig konfliktlos. (Es würde sich dabei übrigens ein Stabilitätsmaß von SM=1 ergeben.)

Im Zuge weiterer konkreter Anwendungen sollte geprüft werden, ob Transformationen von SM, welche die Bereichsgrenzen 0 und 1 beibehalten, vielleicht zu besser interpretierbaren Relevanzabgrenzungen führen. Würde man etwa aus dem Beispielswert von SM=0,23 noch einmal die Wurzel ziehen (was einer solchen Transformation entspräche), so erhielte man einen Wert von 0,48, der etwa in der Mitte zwischen 0 und 1 liegt. Eine derartige Transformation müßte natürlich begründet sein, damit nicht die Gefahr einer Manipulation entsteht.

Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, ist die Ermittlung der Kippgewichte selbst nicht der eigentliche Zweck, sie ist nur Mittel zum Zweck. Ihre Angabe könnte gleichsam als Einladung zur Manipulation aufgefaßt werden, da die Kippgewichte ja angeben, wie (minimal verändert) hätte gewichtet werden müssen, um eine Umkehr des Reihungsergebnisses zu erzielen. Diese mißbräuchliche Verwendung ist zwar nicht ausgeschlossen, aber jeder, der dies beabsichtigt, deklariert sich zugleich. Der Vorgang ist jedermann offenkundig und nachvollziehbar. Die Angabe von Kippgewichten hat jedoch den Vorteil, daß sie sehr übersichtlich und anschaulich zeigen, welcher minimale „Wertewandel" zu einem Umkippen der ursprünglichen Reihenfolge führen würde. Sie tragen so wesentlich dazu bei, das Systemverständnis zu verbessern.

Zugleich mit der Präsentation und konkreten Angabe der Ermittlung des Stabilitätsmaßes in diesem Beitrag wird die Einladung ausgesprochen, sich des Verfahrens zu bedienen. Daran knüpft sich die Hoffnung, Erfahrungen aus unterschiedlichsten Anwendungsbereichen zu sammeln und anschließend einen kritischen Erfahrungsaustausch durchzuführen.

Summary

As is known, action alternatives can be brought into a rank order by means of the utility value analysis. In most utility value analyses, however, one is not only interested in the rank order itself but also in its stability. For this purpose usually a sensitivity analysis is carried out, which, as a rule, is based on variation of criteria weights. Basically, there is possible an infinity of weight variations many of which being redundant numerical ballast. This fact initiated the development of a new check quantity called measure of stability. It is defined within a numerical scope between 0 and 1. 0 shall represent absolute instability (i. e., the least change of any weight causes a change of the rank order) and 1 shall represent absolute stability (i. e., a change of the rank order is impossible regardless of any change of the weights). Postulating this interpretation facilities the measure of stability can be defined as a quotient of minimum and maximum standard deviation of criteria weights. Thus, the problem is solved by quadratic programming for which a concrete procedure is revealed. Applicability is proved by an example. Furthermore, it is shown that the measurement of stability also can be interpreted as an indicator of propensity for conflict potential.

Résumé

Il est connu qu'on peut classer des alternatives d'actions par ordre de préférence à l'aide d'une analyse multi-critères. Dans la plupart des analyses multi-critères, on ne s'intéresse pas seulement pour cet ordre de préférence, mais également pour sa stabilité. A cet effet, on procède normalement à une analyse de sensitivité qui se base on général sur les variations du poids des critères. Un nombre infini de variations de poids est en principe possible; une grande partie en sont des chiffres inutiles. Ce fait a entraîné le développement d'une nouvelle variable à tester qui est définie comme mesure de stabilité. Elle est définie dans une zone de valeurs entre 0 et 1, 0 étant l'instabilité absolue (effondrement des résultats des séries pour chaque modification minimale des poids des critères) et 1 étant la stabilité absolue (un effondrement des résultats des séries pour toute modification des poids des critères étant impossible). Avec ces données d'interprétation, on peut définir la mesure de stabilité comme le quotient d'un écart-type minimal et maximal de poids des critères. Le problème est résolu à l'aide d'un carré du calcul de planification pour lequel est indiqué un procédé concret. L'applicabilité est démontrée sur un exemple. Il est en outre démontré que la mesure de stabilité peut être également interprétée comme un indice pour la matière à conflit que peut être ce problème.